

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE
ESCOAMENTO TURBULENTO EM
BIFURCAÇÃO USANDO MULTIDOMÍNIOS**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE
FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

JOÃO FLÁVIO VIEIRA DE VASCONCELLOS

FLORIANÓPOLIS, DEZEMBRO DE 1993

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTO TURBULENTO EM BIFURCAÇÃO USANDO MULTIDOMÍNIOS

JOÃO FLÁVIO VIEIRA DE VASCONCELLOS

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE **MESTRE EM ENGENHARIA** ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA,
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO CIÊNCIAS TÉRMICAS, APROVADA EM SUA FORMA
FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.



Prof. CLOVIS RAIMUNDO MALISKA, Ph.D.
ORIENTADOR



Prof. BEREND SNOEIJER, Dr. Ing.
COORDENADOR DO CURSO

BANCA EXAMINADORA



Prof. CLOVIS RAIMUNDO MALISKA, Ph.D.



Prof. ÁLVARO TOUBES PRATA, Ph.D.



Prof. ANTÔNIO FÁBIO CARVALHO DA SILVA, Dr. Eng. Mec.



Prof. SÉRGIO COLLE, Dr. Sc.

..... *“Não entender” era tão vasto que ultrapassava qualquer entender – entender era sempre limitado. Mas não-entender não tinha fronteiras e levava ao infinito, ao Deus. Não era um não-entender como um simples de espírito. O bom era ter uma inteligência e não entender.*

Clarice Lispector, Uma Aprendizagem ou O livro dos Prazeres

Dedico este trabalho à minha mãe e ao meu filho.

SIMULAÇÃO NUMÉRICA
DE ESCOAMENTO
TURBULENTO EM BIFURCAÇÃO
USANDO MULTIDOMÍNIOS

Agradecimentos

Ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – pelo suporte financeiro ao trabalho.

À Pirelli Industrial Brasileira S/A, que através de sua permanente necessidade de soluções novas e pela sua política de pesquisa e desenvolvimento integrado com universidades propiciou a oportunidade deste trabalho.

Ao amigo Marcos Marques, que me ensinou os primeiros passos com o \TeX .

Ao amigo Clovis Maliska Jr. pelo seu empenho na elaboração do ISO-3D, que tanto me facilitou na apresentação das isolinhas deste trabalho.

Aos amigos Carlos Henrique Marchi e Axel Dihlmann, com quem tenho aprendido muito em nossa convivência diária no SINMEC.

Ao Prof. Antônio Fábio, pela paciência ao me ajudar a tirar dúvidas e a escolher o melhor programa para iniciar o trabalho.

Ao Prof. Sérgio Colle, com quem trabalhei durante a minha formação de engenheiro mecânico, e tive a oportunidade de me desenvolver profissionalmente e pessoalmente.

Aos amigos, Carlos e Letícia Baixo, Amadeu Esteves e Thamy Cristina por terem me suportado por todo este período.

Aos amigos do SINMEC que de uma forma ou de outra contribuíram, e muito, com este trabalho.

Ao Prof. Clovis Maliska, que com sua luta diária para a manutenção do SINMEC, tem sido para mim um modelo a ser seguido.

Ao Mauricio Berto e Marcos Omoto pela colaboração na edição das figuras.

A todos, que de uma forma ou de outra, contribuíram para que este trabalho pudesse ser realizado.

Sumário

Sumário	vii
Resumo	ix
Abstract	x
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
Simbologia	xiv
1. Preliminares	1
Apresentação	1
Revisão Bibliográfica	3
Delineamento da Dissertação	6
2. Formulação do Problema	8
Introdução	8
Modelação do Escoamento Turbulento	8
Equação de Conservação no Plano Cartesiano	12
Equação da Conservação da Massa	12
Equação de Navier-Stokes na direção x	13
Equação de Navier-Stokes na direção y	13
Equação da Energia Cinética Turbulenta (k)	13
Equação da Dissipação da Energia Cinética Turbulenta (ϵ)	13
Equações Diferenciais no Plano Transformado	14
Condições de Contorno	18
Condições de Contorno de Entrada de Massa	18
Condições de Contorno de Saída de Massa	19
Condições de Contorno de Não-Deslizamento nas Paredes	20
3. Solução Numérica	22

Introdução	22
Obtenção das Equações Aproximadas	23
Acoplamento Pressão-Velocidade	27
Condições de Contorno	27
Condições de Contorno de Entrada de Massa	28
Condições de Contorno de Saída de Massa	28
Condições de Contorno de Não-Deslizamento nas Paredes	29
Aplicação da Metodologia de Multidomínios	31
CrITÉRIOS de Convergência	36
4. Validação do Modelo Numérico	37
Introdução	37
Necessidade de Validar o Programa Computacional	37
Escoamento Turbulento Entre Placas Planas Paralelas	38
Escoamento Laminar em Bifurcações	40
5. Aplicação da Metodologia a uma Bifurcação	47
Introdução	47
Influência das Vazões	50
Influência do Ângulo da Bifurcação	55
Influência da Seção de Entrada do Duto Vertical	58
Influência das Obstruções	60
Sugestões para Próximos Trabalhos	63
Referências Bibliográficas	64
A. Apêndice	69
Equação de k	69
Equação de ϵ	72
B. Apêndice	75

Resumo

Neste trabalho é apresentado um estudo do escoamento turbulento no interior de uma bifurcação. Dutos com bifurcações ocorrem em uma série de aplicações práticas e, neste estudo, a motivação surgiu da necessidade de se compreender o escoamento turbulento no interior de uma bifurcação encontrada em fornos de esmaltação de fios. Em função da natureza da geometria do duto bifurcado, não é possível empregar coordenadas generalizadas com o mapeamento em um bloco único. Desta forma uma metodologia usando multidomínios é desenvolvida, onde as condições de contorno são transferidas via interface.

O modelo de turbulência $k-\epsilon$ é empregado considerando os altos valores do número de Reynolds.

A análise é realizada variando-se as dimensões dos dutos, ângulos da bifurcação e relações de vazões. É também analisado dutos com obstruções internas com o objetivo de criar velocidades transversais mais elevadas.

Abstract

Bifurcating ducts occurs in a wide range of engineering applications. The motivation for this work is the need of better understanding the turbulent flow in a bifurcating channel encountered in the wire enamelling process. Due to the nature of the channel geometry the use of boundary-fitted coordinates which maps onto a single rectangular domain is unfeasible. Therefore, a multidomain technique is developed where informations from one domain to another is transferred through the interface.

The $k-\epsilon$ turbulent model for high Reynolds number flows is employed.

The analysis is undertaken considering the variation of channel geometry, bifurcating angle and mean flow rate in the branches. It is also analyzed channels with internal bumps in order to create higher transversal velocities.

Lista de Figuras

1.1. Exemplo de uma bifurcação	1
1.2. Malha de uma bifurcação usando um único domínio	2
1.3. Representação esquemática de várias bifurcações	4
1.4. Geometria estudada por Dimitriadis [6]	5
2.1. Representação esquemática de uma bifurcação	18
3.1. Volume finito típico e disposição das variáveis	23
3.2. Volume finito na região de entrada de massa	28
3.3. Volume finito na região de saída de massa	29
3.4. Região próxima à parede	30
3.5. Multidomínios sem região de intersecção	32
3.6. Esquema da bifurcação e seus 2 subdomínios	33
3.7. Esquema da bifurcação e seus 2 subdomínios	34
4.1. Geometria do problema de placas planas paralelas	38
4.2. Escoamento turbulento entre placas planas e paralelas	39
4.3. Malha da bifurcação 82x22 e 22x82	41
4.4. Escoamento Laminar em uma bifurcação com número de Reynolds = 32 e 30° de ângulo	41
4.5. Escoamento laminar em uma bifurcação com número de Reynolds = 64 e 30° de ângulo	42
4.6. Escoamento laminar em uma bifurcação com número de Reynolds = 32 e 150° de ângulo	43

4.7. Escoamento Laminar em uma bifurcação com número de Reynolds = 64 e 150° de ângulo	44
4.8. Escoamento Laminar – 20% da massa no duto vertical	45
4.9. Escoamento Laminar – 50% da massa no duto vertical	45
4.10. Escoamento Laminar – 80% da massa no duto vertical	46
5.1. Representação esquemática de uma esmaltatriz	48
5.2. Geometria da Bifurcação	49
5.3. Malha 120 x 16 (horizontal) e 32 x 62 (vertical) usada na solução do problema	50
5.4. Ângulo entre u e v na altura = 30 %	51
5.5. Ângulo entre u e v na altura = 50 %	52
5.6. Ângulo entre u e v na altura = 70 %	52
5.7. Comportamento de $\frac{v}{u_{ref}}$ para as três vazões	53
5.8. Comportamento de $\frac{v}{u_{ref}}$ em diferentes alturas	53
5.9. Linhas de corrente para $v_w = 0,05 [\frac{m^3}{s}]/m$ e $v_e = 0,95 [\frac{m^3}{s}]/m$	54
5.10. Ângulo entre u e v na altura = 70 % para três ângulos de bifurcação	55
5.11. Linhas de corrente para $v_w = 0,05 [\frac{m^3}{s}]/m$ e $v_e = 0,95 [\frac{m^3}{s}]/m$	56
5.12. Linhas de corrente para $v_w = 0,05 [\frac{m^3}{s}]/m$ e $v_e = 0,95 [\frac{m^3}{s}]/m$	57
5.13. Ângulo entre u e v na altura = 70% para três tamanhos da seção de entrada do duto vertical	58
5.14. Linhas de corrente para $v_w = 0,05 [\frac{m^3}{s}]/m$ e $v_e = 0,95 [\frac{m^3}{s}]/m$	59
5.15. Malha da esmaltatriz com quatro obstruções internas	60
5.16. Ângulo entre u e v na altura = 50% para duto com e sem obstruções internas	61
5.17. Malha da esmaltatriz com quatro obstruções internas	62
B.1. Fronteira com sistemas de coordenadas desalinhados	75

Lista de Tabelas

2.1.	Constantes das equações (2.9), (2.10) e (2.11c)	14
2.2.	Valores de Γ , S^ϕ e P^ϕ da Eq. (2.12)	16
3.1.	Termos fontes da Eq. (3.1)	26
5.1.	Linhas de Corrente da Fig. 5.9	54
5.2.	Linhas de Corrente da Fig. 5.11	56
5.3.	Linhas de Corrente da Fig. 5.12	57
5.4.	Linhas de Corrente da Fig. 5.14	59
5.5.	Linhas de Corrente da Fig. 5.17	62

Simbologia

A	Coefficientes das equações de conservação
C_1, C_2	Constantes da equação para ϵ
E	Constante do modelo de turbulência
J	Jacobiano da transformação de coordenadas
k	Energia cinética turbulenta
P	Pressão termodinâmica
P_k	Taxa de geração de energia cinética turbulenta
Pe	Número de Peclet da malha
S	Termo fonte das equações de conservação
t	Tempo
u, v	Componentes cartesianas do vetor velocidade nas direções x e y , respectivamente
U, V	Componentes contravariantes do vetor velocidade nas direções ξ e η , respectivamente
x, y	Direções do sistema de coordenadas cartesiano

Subscritos

x, y	Derivadas de primeira ordem
ξ, η	Derivadas de primeira ordem
w	Parede

Gregas

α, β	Coefficientes da função de interpolação do WUDS
ξ, η	Direções do sistema de coordenadas generalizado
ϕ	Escalar geral

ρ	Massa específica
ϵ	Dissipação da energia cinética turbulenta
μ_{ef}	Viscosidade efetiva
μ_L	Viscosidade absoluta
μ_T	Viscosidade turbulenta
δ_{ij}	Delta de Kronecker
κ	Constante do modelo de turbulência

Apresentação

Bifurcação é o ponto em que alguma coisa se divide em dois ramos, ao modo de uma forquilha, segundo Ferreira [8]. Geometrias de forma bifurcada por onde passa alguma espécie de fluido podem ser encontradas em sistemas de refrigeração, trocadores de calor, resfriadores de componentes eletrônicos, plantas de processos químicos, etc. O conhecimento da natureza do escoamento na região da bifurcação faz com que projetistas e pesquisadores possam otimizar e aumentar a eficiência destes equipamentos. Pela definição apresentada fica implícito que quando se menciona bifurcação pretende-se caracterizar somente a geometria e não se há a separação, Fig. 5.1 – (a), ou a junção, Fig. 5.1 – (b), do fluido que por ela passa.

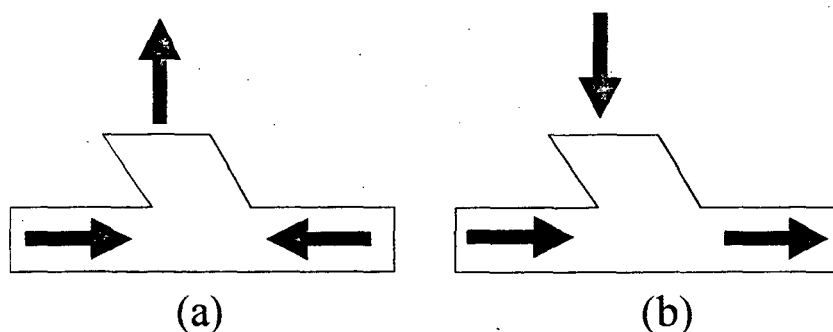


Figura 1.1: Exemplo de uma bifurcação

É interessante ressaltar que o estudo de Mecânica dos Fluidos em bifurcações não é de interesse exclusivo de engenheiros que lidam com processos industriais. Um número muito

grande de artigos sobre bifurcações pode ser encontrado em revistas médicas ou ligadas à bioengenharia. A razão que motiva estes profissionais é o estudo da arteriosclerose, uma doença degenerativa que afeta as artérias, onde placas de uma substância rica em colesterol se depositam nas paredes das artérias diminuindo a seção onde o sangue passa. Estudos têm demonstrado que a arteriosclerose não ocorre de uma forma aleatória no sistema circulatório, mas preferencialmente onde exista uma bifurcação ou uma curvatura muito grande das artérias. Sob a ótica da Mecânica dos Fluidos encontra-se a explicação para este fenômeno. As zonas mais afetadas pela arteriosclerose coincidem com as zonas de recirculação ou de estagnação sangüínea. Acreditam os pesquisadores que o conhecimento da hemodinâmica em artérias com bifurcações será de fundamental importância para prevenir a arteriosclerose. Os trabalhos de Ehrlich e Friedman [7], Rindt [43] ou ainda Karino [17] ilustram claramente a importância que tal geometria tem para os pesquisadores ligados à biomecânica.

O objetivo deste trabalho é o de estudar numericamente o comportamento do ar no interior de dutos contendo uma bifurcação. E, para que este estudo possa ser realizado, o desenvolvimento de um programa computacional onde a geometria não seja um fator limitante passa a ser indicado. Entre as metodologias onde a geometria não é uma restrição, o uso de coordenadas generalizadas [49] para mapear o domínio foi a opção escolhida.

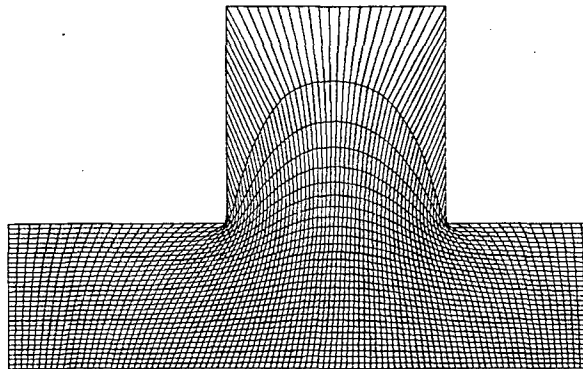


Figura 1.2: Malha de uma bifurcação usando um único domínio

Esta metodologia, entretanto, apresenta dificuldades no mapeamento de algumas geometrias em um único domínio, dentre as quais pode-se incluir as bifurcações. Especificamente para este tipo de geometria, quando o duto vertical apresentar um alto índice de esbeltez, não será possível gerar uma malha adequada, uma vez que todas as linhas coordenadas que passam pela região maior do domínio serão forçadas a passar pelo duto vertical. A Fig. 1.2 mostra como seria a malha de uma bifurcação se somente um único domínio fosse usado para o seu mapeamento. Observe que nesta figura a seção de entrada

do duto vertical é maior que a do duto horizontal, pois não foi possível gerar, usando um único domínio, uma malha de uma bifurcação onde a seção de entrada do duto vertical fosse menor do que a do duto horizontal.

A solução encontrada foi a de subdividir o domínio de interesse em dois. Assim, cada subdomínio é mapeado de forma independente eliminando completamente os inconvenientes do mapeamento em um domínio único.

Para tornar este estudo mais abrangente, o escoamento que passa pela bifurcação foi considerado turbulento. Desta forma, um modelo para descrever os fenômenos associados à turbulência tem que ser usado. Dentre os modelos existentes, optou-se pelo uso do modelo $k-\epsilon$ de turbulência, por razões que serão citadas no segundo capítulo. É importante ressaltar que a busca de um modelo mais adequado ou a sua melhoria não são objetivos deste trabalho, que faz uso do modelo de turbulência somente como uma ferramenta para conhecer os fenômenos envolvidos no processo.

Para a discretização das equações diferenciais que governam o fenômeno físico foi usado a técnica dos volumes finitos e as variáveis foram armazenadas de forma co-localizada [31].

Revisão Bibliográfica

Em uma bifurcação podem ocorrer ou a divisão do fluxo de massa ou a união deste fluxo. Isto ocorre em diferentes tipos de geometrias. Como exemplo, cita-se a existência de bifurcações em forma de “T” ou de um “Y” simétrico. A Fig. 1.3 mostra algumas das possibilidades de combinações entre escoamento e geometria. O número ao lado de cada representação esquemática indica como esta geometria será referenciada na sequência deste trabalho.

Apesar da geometria ser relativamente simples, o escoamento que por ela passa é frequentemente complexo. Esta complexidade explica, de certa forma, porque trabalhos sobre este tema são tão escassos na literatura especializada.

Pollard e Spalding [37] estudaram um escoamento tridimensional turbulento em uma bifurcação do tipo 1. Fazendo uso da simetria que o problema apresenta, eles só resolveram a parte horizontal da bifurcação. Consideraram que nesta parte horizontal estaria entrando um escoamento plenamente desenvolvido com número de Reynolds na ordem de 40.000. Usando uma malha ortogonal eles resolveram as equações que governam este escoamento usando diferenças finitas.

Usando também diferenças finitas Blowers [1] apresentou a solução para bifurcações do tipo 4 para o valor de Reynolds de 180 e 900.

Kawaguti e Hamano [18] investigaram a influência de parâmetros geométricos no comportamento de um escoamento laminar de um fluido newtoniano. Bifurcações do tipo 2 e do tipo 3 com $\phi = 30^\circ$, 90° e 150° foram analisadas usando diferenças finitas. Como o objetivo do trabalho era estudar o comportamento do escoamento do sangue humano, os valores do número de Reynolds foram sempre menores que 64.

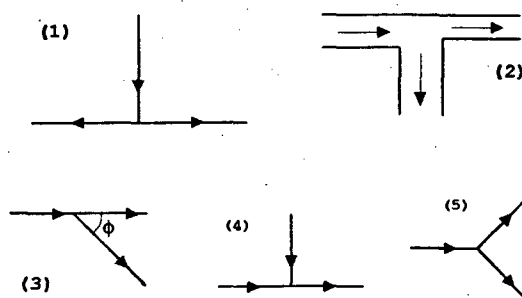


Figura 1.3: Representação esquemática de várias bifurcações

Pollard [36] apresentou em seu trabalho um estudo de transferência de calor e massa em uma bifurcação onde havia a divisão igual do fluxo de massa (tipo 1). O modelo $k-\epsilon$ de turbulência foi usado e medições experimentais foram feitas para verificar a concordância do modelo com o experimento.

Liepsch *et alli* [22] fizeram medições de velocidades e pressão em uma bifurcação do tipo 3 com $\phi = 90^\circ$. Usando diferenças finitas eles também resolveram numericamente o problema, supondo um escoamento laminar. A concordância foi boa, mesmo para número de Reynolds da ordem de 1.200. Um único domínio computacional foi usado para a solução numérica.

Bramley e Dennis [2] fizeram uso da simetria para estudar o escoamento no interior de um duto em forma de Y (tipo 5). Estes estudos foram realizados para diversos valores do número de Reynolds e para algumas relações de altura do duto na entrada e na saída. A metodologia usada para a solução deste problema foi, também, diferenças finitas.

Ehrlich e Friedman [7] aperfeiçoaram os modelos até então existentes de artérias usando coordenadas generalizadas para gerar o domínio computacional e estudar uma artéria em forma de Y (tipo 5). Novamente fez-se uso da simetria para alcançar a solução do problema.

Bramley e Sloan [3] utilizam coordenadas generalizadas para estudar situações semelhantes as estudadas em [2].

Hayes *et alli* [15] apresentam um trabalho que faz uso de elementos finitos para determinar o campo de velocidades em um escoamento laminar de um fluido newtoniano em uma bifurcação do tipo 3 com $\phi = 90^\circ$.

Samagaio e Vlachos [44] fizeram um estudo do comportamento de um duto retangular onde se encontra uma bifurcação de 90° (tipo 3). Para escoamento laminar usando uma geometria tridimensional, eles apresentam a influência de fatores geométricos no estabelecimento das recirculações existentes.

Dimitriadis [6] escreveu o mais completo e abrangente trabalho sobre bifurcações. Trata-se do estudo de uma bifurcação, cuja geometria bastante complexa pode ser vista na Fig. 1.4, e o escoamento é turbulento. Há análises tanto para quando o fluxo de massa se divide quanto para quando há a união deste fluxo. Todos estes casos são acompanhados de um trabalho experimental para avaliar o modelo. A metodologia de coordenadas generalizadas foi empregada para descrever a geometria e volumes finitos para discretizar as equações que regem o problema. Para evitar os problemas quanto ao uso de coordenadas generalizadas em geometrias complexas, Dimitriadis usou vários domínios computacionais para realizar o seu estudo. Um resumo deste trabalho pode ser encontrado no artigo de Leschziner e Dimitriadis [21].

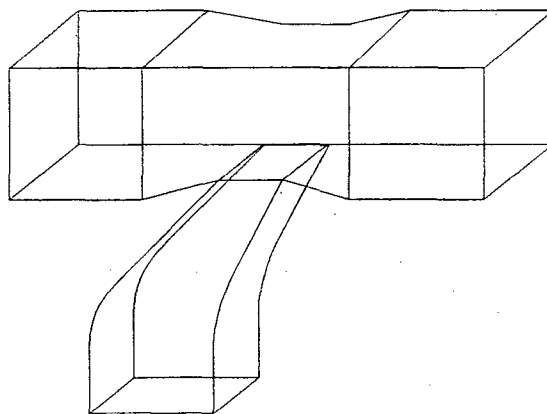


Figura 1.4: Geometria estudada por Dimitriadis [6]

Como não faz parte deste trabalho uma análise criteriosa sobre os modelos de turbulência, a pesquisa bibliográfica sobre este tema buscou apenas artigos onde houvesse uma revisão sobre o tema. Assim, pode-se adquirir o conhecimento necessário para que o

modelo de turbulência fosse usado como um meio para se alcançar um fim e não um fim em si mesmo.

Cita-se o trabalho de Launder e Spalding [20], onde as equações do modelo $k-\epsilon$ são apresentadas na forma que é amplamente utilizada na atualidade.

No livro de Rodi [42] pode-se encontrar uma retrospectiva sobre escoamento turbulento em dutos. Nele, pode-se encontrar os fundamentos da modelação do escoamento turbulento.

Os trabalhos de Ferziger [9], Nallasamy [27] e de Pletcher [35] fazem uma revisão sobre vários aspectos do fenômeno da turbulência, envolvendo escoamentos incompressíveis, no primeiro, e escoamentos no interior de dutos, nos outros dois trabalhos. Todos apresentam uma visão bem geral do que se está fazendo em modelação de escoamento turbulento.

Uma questão importante que merece a atenção é sobre como armazenar as variáveis na malha, pois existem pelo menos duas maneiras distintas de fazê-lo. A primeira, armazenamento desconstruído das variáveis, proposta por Harlow e Welch [13], que tem como vantagem o forte acoplamento entre a pressão e a velocidade. Como desvantagem, cita-se a necessidade do cálculo do fluxo difusivo e convectivo em cada uma das faces de diferentes volumes de controle. Os usuários do método de volumes finitos, que trabalham com escoamentos incompressíveis, usam este método devido a influência exercida por Patankar [29].

A outra maneira é o armazenamento co-localizado das variáveis, onde todas as variáveis são localizadas no centro dos volumes. Peric *et alli* [31], entre outros autores, apresenta uma maneira de construção da equação da pressão, eliminando a possibilidade do surgimento de campos irrealistas. Isto acontece porque as velocidades nas faces do volume são avaliadas de modo a satisfazer a uma média da equação linearizada da conservação do movimento linear.

No que se refere a escoamentos turbulentos, Obi *et alli* [28] apresentaram o único trabalho em que, usando variáveis co-localizadas, obteve-se a solução numérica de um escoamento turbulento. Neste trabalho é feita uma comparação entre a solução do tensor de Reynolds e o modelo $k-\epsilon$, usando volumes finitos.

Delineamento da Dissertação

Dentro do contexto apresentado, procurou-se realizar um estudo da mecânica dos fluidos em uma bifurcação, juntamente com o desenvolvimento de uma solução por domínios

(multiblocos). A influência de parâmetros geométricos e de configurações de escoamento são o alvo deste trabalho que será apresentado da seguinte forma :

- No segundo capítulo serão apresentados as equações que governam o fenômeno físico, inclusive as equações do modelo $k-\epsilon$. Estas equações são apresentadas tanto no sistema cartesiano de coordenadas como no sistema de coordenadas generalizadas. As condições de contorno são também apresentadas neste capítulo.
- O terceiro capítulo tratará da metodologia de solução do problema. A discretização das equações, a aplicação das condições de contorno e o uso da metodologia de multidomínios serão apresentados nesta parte do trabalho;
- O quarto capítulo será destinado a apresentação dos casos que validam o procedimento numérico;
- No quinto capítulo serão apresentados os resultados do estudo realizado para conhecer como se comporta um fluido no interior de um duto que contém uma bifurcação. Isto é feito para algumas geometrias e para várias situações de escoamentos. Também neste capítulo são apresentadas as conclusões deste trabalho.
- O apêndice A tratará da dedução do modelo $k-\epsilon$ de turbulência.
- O apêndice B tratará de detalhes numéricos usados neste trabalho.

CAPÍTULO DOIS

Formulação do Problema

Introdução

Neste capítulo encontra-se a descrição do modelo matemático empregado no estudo do comportamento do escoamento turbulento em uma bifurcação.

A primeira seção é dedicada à derivação das equações diferenciais que regem o fenômeno físico. Tendo em vista que a aplicação direta da equação de Navier-Stokes é, atualmente, impraticável para esta faixa de número de Reynolds, foi usado um modelo de turbulência. As equações deste modelo de turbulência são apresentadas nesta seção.

A geometria que se pretende estudar não é adequadamente discretizada usando os sistemas de coordenadas convencionais, pois dificilmente haveria coincidência entre as linhas de coordenadas com a fronteira do domínio a ser estudado. Assim, optou-se pelo uso de coordenadas generalizadas [49] para discretizar o domínio físico e, por tornar as integrações mais simples, as equações foram transformadas do sistema cartesiano para o sistema de coordenadas generalizadas. Esta transformação é vista na segunda seção deste capítulo.

A última seção é dedicada a apresentação das condições de contorno deste problema. Nesta parte também é discutida a aplicação das funções de parede (*wall functions*).

Modelação do Escoamento Turbulento

De uma maneira geral, os autores que trabalham com a modelação do fenômeno da turbulência em escoamentos acreditam que a equação de Navier-Stokes é capaz de descrever adequadamente tanto um escoamento laminar quanto um turbulento. Em problemas

de interesse de engenharia envolvendo escoamento laminar, soluções numéricas têm sido obtidas há muitas décadas sem maiores dificuldades. Mas quando há escoamento turbulento envolvido, a aplicação direta da equação de Navier-Stokes ainda não é possível. Isto porque o fenômeno da turbulência ocorre em escalas muito pequenas, tanto espaciais como temporais, o que implica em uma malha contendo um número absurdamente grande de pontos para a discretização deste domínio. Atualmente não há computador que possua uma CPU suficientemente veloz e uma memória tal que consiga solucionar um escoamento turbulento. Rodi [42] escreveu, na introdução de seu livro, que seria necessária uma malha com 10^9 pontos para poder solucionar um determinado escoamento turbulento completamente. Cebecchi e Smith [5] em um livro escrito em 1974 informam que para alcançar a solução de um problema hidrodinâmico em um aerofólio necessitaria 35.000 anos de CPU usando os mais modernos computadores existentes na época. Mesmo sabendo que os atuais computadores são diversas vezes mais rápidos do que os que existiam em 1974, ainda hoje não há um computador que permita a aplicação direta da equação de Navier-Stokes em escoamentos turbulentos em engenharia.

Como na natureza a grande maioria dos escoamentos é turbulento, diversos modelos que descrevem a mecânica do escoamento turbulento foram elaborados. Apesar de todo o esforço empregado pelos pesquisadores, no sentido de achar um modelo que pudesse descrever qualquer situação envolvendo escoamento turbulento com exatidão, este modelo ainda não foi encontrado. A razão principal é que em todos os modelos há informações que são obtidas empiricamente para determinados situações físicas, tornando, desta forma, o modelo específico para determinadas classes de problemas. Este empirismo existente nos modelos de turbulência está diretamente ligado ao fato de que todos os mecanismos de troca turbulenta no escoamento não terem sido ainda elucidados.

Uma das maneiras utilizadas para modelar o fenômeno da turbulência é através de uma representação estatística do fenômeno usando uma média ao longo do tempo. Assim, uma variável ϕ qualquer pode ser decomposta na soma do seu valor médio, $\bar{\phi}$, mais a sua flutuação, ϕ' . Ou seja :

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (2.1)$$

O valor de $\bar{\phi}$ é definido da seguinte maneira :

$$\bar{\phi} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \phi dt \quad (2.2)$$

onde T é significativamente maior que o período de tempo das flutuações.

Substituindo a Eq. (2.1) na equação de Navier-Stokes para fluidos newtonianos e escoamentos isocóricos e, ainda, aplicando o processo de médias, presente no apêndice A, chega-se a seguinte equação

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_L \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) \quad (2.3)$$

Analisando a equação anterior pode-se perceber que ela é idêntica à equação de Navier-Stokes para o regime laminar, com exceção feita ao termo $\rho \overline{u'_i u'_j}$. Este termo, conhecido como tensor de Reynolds, resulta da não-linearidade da equação de Navier-Stokes e representa o efeito da turbulência no escoamento médio.

O tensor de Reynolds representa os seguintes efeitos no escoamento médio :

1. Absorção da energia cinética do escoamento médio e sua conversão em energia térmica (**dissipação**); e
2. Aumento da taxa de transporte de massa, momento e energia na direção normal às linhas de corrente (**difusão**).

Ambos estes efeitos foram modelados da seguinte forma por Boussinesq :

$$\overline{u'_i u'_j} = -\mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2.4)$$

onde

$$k = \frac{\overline{u'_p u'_p}}{2} \quad (2.5)$$

Para que a Eq. (2.3) possa ser resolvida, usando o modelo de Boussinesq – Eq. (2.4) – e a definição de energia cinética turbulenta – Eq. (2.5) – é necessário especificar o valor da viscosidade turbulenta, μ_T . Isto pode ser feito em termos da velocidade média ou através de outras equações que representem corretamente o termo modelado. Ambos os enfoques são usados na prática.

Os modelos de turbulência podem ser classificados de diversas maneiras. A classificação mais comum, presente nos trabalhos de Hackman [12] e Nallasamy [27], relaciona o número de equações diferenciais a ser resolvidas, excluídas as equações diferenciais que regem o escoamento médio.

Desta forma, pode-se classificar os modelos de turbulência como :

- Modelos a zero equação;
- Modelos a uma equação;
- Modelos a duas equações; e,
- Modelos baseados na solução do tensor de Reynolds.

Os três primeiros da classificação acima usam o modelo de viscosidade turbulenta de Boussinesq.

- **Modelos a zero equação** - Nestes modelos, também conhecidos como modelos algébricos, a turbulência é tratada em termos de equações algébricas. O modelo de comprimento de mistura de Prandtl é um exemplo. A principal característica destes modelos é o empirismo. Não são indicados na solução de problemas tridimensionais ou problemas em que ocorra a recirculação do fluido. No cálculo de camadas limites apresentam bons resultados.
- **Modelos a uma equação** - Nestes modelos é necessário que, além das equações diferenciais parciais do escoamento médio, uma equação diferencial parcial seja resolvida. A equação a ser resolvida é, em geral, a da energia cinética turbulenta (k). Esta equação é derivada da equação de Navier-Stokes mas não é exata devido a algumas aproximações feitas nos termos difusivos e de dissipação. Estes modelos não são muito usados visto que seus resultados são somente um pouco melhores do que os apresentados pelos modelos algébricos e exigem um tempo computacional muito maior.
- **Modelos a duas equações** - Nesta classe de modelos está o mais difundido modelo de turbulência, o modelo $k-\epsilon$. Este modelo tem tido muito sucesso na solução de problemas como escoamento em dutos, escoamento com recirculações, escoamentos confinados e jatos. No apêndice A deste trabalho encontra-se a dedução completa das equações deste modelo.
- **Modelos baseados na solução do tensor de Reynolds** - Estes modelos resolvem equações diferenciais parciais para uma ou mais componentes do tensor de Reynolds. Pode-se supor que esta classe de modelos apresenta melhor resultado ao apresentado pelos modelos a duas equações. Mas isto não é necessariamente verdade. Há na literatura, segundo Nallasamy [27] e Martinuzzi [26], referências a situações onde o modelo $k-\epsilon$ apresenta melhores resultados relativamente aos apresentados por modelos que resolvem o tensor de Reynolds.

Como indicado anteriormente a maioria dos trabalhos que modelam escoamentos turbulentos usam um modelo a duas equações. Isto demonstra a capacidade que têm estes tipos de modelos, e em especial o modelo $k-\epsilon$ que é o modelo mais utilizado na atualidade

e tem demonstrado bons resultados na determinação do campo de velocidades, principalmente no interior de dutos. Por estas razões este modelo será empregado neste trabalho.

Equação de Conservação no Plano Cartesiano

O escoamento em análise é bidimensional e elíptico em um duto que contém uma bifurcação. O escoamento é turbulento, mas as velocidades envolvidas não são suficientemente altas para que efeitos de compressibilidade possam ser significativos. As paredes do duto são lisas e as propriedades físicas do fluido foram consideradas constantes e conhecidas. No interior da bifurcação pode haver tanto a união do fluxo de massa quanto a sua separação.

Definido o problema, o próximo passo é a determinação das equações matemáticas que governam este problema físico. Como as equações governantes deste problema podem ser encontradas na maioria dos livros básicos de Mecânica dos Fluidos, somente a forma final das equações será apresentada.

As seguintes hipóteses simplificativas foram utilizadas para se obter o conjunto de equações diferenciais que governam o problema :

- Problema bidimensional;
- Regime permanente;
- Escoamento isocórico;
- Escoamento turbulento;
- Modelo de viscosidade turbulenta de Boussinesq;
- Propriedades físicas do fluido constantes e conhecidas;
- Fluido newtoniano e homogêneo; e,
- Forças de campo nulas em todas as direções.

As seguintes equações governantes do problema físico são obtidas com o uso das simplificações anteriormente comentadas, usando coordenadas cartesianas :

Equação da Conservação da Massa

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

Equação de Navier-Stokes na direção x

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u u - \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho u v - \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P^*}{\partial x} + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{ef} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Equação de Navier-Stokes na direção y

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u v - \mu_{ef} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v v - \mu_{ef} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P^*}{\partial y} + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{ef} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Equação da Energia Cinética Turbulenta (k)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u k - \left(\frac{\mu_T}{\sigma_k} + \mu_L \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v k - \left(\frac{\mu_T}{\sigma_k} + \mu_L \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right) = P_k - \rho \epsilon \end{aligned} \quad (2.9)$$

Equação da Dissipação da Energia Cinética Turbulenta (ϵ)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u \epsilon - \left(\frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} + \mu_L \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v \epsilon - \left(\frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} + \mu_L \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) = \frac{\epsilon (C_1 P_k - C_2 \rho \epsilon)}{k} \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde

$$P_k = 0,5\mu_T \left(\left(2\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(2\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (2.11a)$$

$$P^* = \bar{P} + \frac{2}{3}\rho k \quad (2.11b)$$

$$\mu_T = C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.11c)$$

$$\mu_{ef} = \mu_L + \mu_T \quad (2.11d)$$

P_k é a taxa de geração de energia cinética turbulenta.

Tabela 2.1: Constantes das equações (2.9), (2.10) e (2.11c)

C_1	1,44
C_2	1,92
C_μ	0,09
σ_ϵ	1,30
σ_k	1,0

As constantes da tabela 2.1 foram obtidas em Launder e Spalding [20]. Constantes com valores semelhantes às apresentadas foram encontradas nas referências [12,27]. Tais constantes foram testadas e não alteraram os campos de velocidades de forma significativa.

As derivadas temporais existentes nas equações diferenciais anteriormente apresentadas foram mantidas, apesar do propósito deste trabalho ser o de obter exclusivamente soluções em regime permanente. Isto acontece porque os termos transientes são usados para fins de avanços iterativos na solução numérica.

Equações Diferenciais no Plano Transformado

Na seção anterior todas as equações diferenciais que regem este problema foram apresentadas. Elas definem um conjunto de igual número de equações e incógnitas. Estas

equações são não-lineares e acopladas entre si, por isso, não há na literatura nenhuma solução analítica que resolva este conjunto de equações. A alternativa para que a solução deste sistema de equações possa ser encontrada é, de alguma forma, aproximar as equações diferenciais e as condições de contorno e obter uma solução numérica.

Um dos métodos existentes para a solução de equações diferenciais é o uso da técnica dos Volumes Finitos. Esta técnica, cujo trabalho precursor foi o de Harlow e Welch [13], foi empregada em problemas de Mecânica dos Fluidos na década de 60 e tornou-se a metodologia numérica mais usada para esta classe de problemas. O método consiste em discretizar o domínio de interesse em um número finito de volumes de controle. Após esta discretização ter sido realizada, integra-se as equações diferenciais no tempo e no volume discretizado. Cada equação integrada é transformada em uma equação algébrica para cada pequeno volume do domínio. Então, a solução é encontrada através da solução de um sistema de equações lineares. Este método tornou-se através dos anos o mais usado na solução de problemas de Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor. As técnicas numéricas para a solução de problemas de Mecânica dos Fluidos foram eficientemente disseminadas por Patankar [29] e Roache [41] em dois livros que são hoje clássicos sobre o assunto.

Na aplicação da técnica dos volumes finitos é muito importante a escolha de um sistema de coordenadas onde serão solucionadas as equações que governam a física do problema. Dependendo da escolha feita serão necessárias interpolações quando da aplicação das condições de contorno, pois pode não haver coincidência entre as linhas das coordenadas e a fronteira do domínio que se pretende estudar. Como a solução do problema é fortemente dependente das condições de contorno, e de como elas são aplicadas, a interpolação na fronteira poderá ser uma, entre outras tantas, fonte de imprecisão.

Quando se faz uso de malhas estruturadas, o sistema de coordenadas ideal é aquele cujas linhas coincidem com a fronteira do domínio. Tal sistema é denominado sistema de coordenadas natural. Neste sistema os erros oriundos das interpolações das condições de contorno na fronteira deixam de existir.

O duto com uma bifurcação pode ser incluído na categoria de geometrias complexas. Assim sendo, um sistema de coordenadas naturais para esta geometria que possa ser obtido através de equações algébricas não existe. Mesmo quando se faz uso da técnica dos multidomínios, cada um dos subdomínios pode ser considerado uma geometria complexa.

Esta foi a principal razão pela qual se optou pelo sistema de coordenadas generalizadas para discretizar o domínio físico e resolver, neste sistema de coordenadas, o conjunto de equações diferenciais. O sistema de coordenadas generalizadas é uma metodologia que busca um sistema de coordenadas natural para uma geometria arbitrária.

O princípio do uso de coordenadas generalizadas é a transformação de um domínio simplesmente conexo, a geometria física, em uma geometria retangular, a geometria transformada. Todo o problema físico é resolvido neste plano transformado, evitando assim as interpolações nos contornos do domínio. Os fundamentos básicos da transformação do plano físico (x,y) para o plano computacional (ξ,η) e outros detalhes do uso de coordenadas generalizadas podem ser vistos em [23].

Tabela 2.2: Valores de Γ , S^ϕ e P^ϕ da Eq. (2.12)

ϕ	Γ	$\frac{S^\phi}{J}$	P^ϕ
1^*	0	0	0
u	μ_{ef}	$\frac{\partial}{\partial \xi} [J \mu_{ef} y_\eta (y_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} - x_\eta \frac{\partial v}{\partial \xi}) + J \mu_{ef} y_\xi (y_\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial v}{\partial \eta})] +$ $\frac{\partial}{\partial \eta} [J \mu_{ef} y_\eta (x_\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial u}{\partial \xi}) + J \mu_{ef} y_\xi (x_\xi \frac{\partial v}{\partial \eta} - y_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta})]$	$y_\eta \frac{\partial P^*}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial P^*}{\partial \eta}$
v	μ_{ef}	$\frac{\partial}{\partial \xi} [J \mu_{ef} x_\eta (x_\eta \frac{\partial v}{\partial \xi} - y_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi}) + J \mu_{ef} x_\xi (x_\eta \frac{\partial v}{\partial \eta} - y_\eta \frac{\partial u}{\partial \eta})] +$ $\frac{\partial}{\partial \eta} [J \mu_{ef} x_\eta (y_\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} - x_\xi \frac{\partial v}{\partial \xi}) + J \mu_{ef} x_\xi (y_\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} - y_\xi \frac{\partial v}{\partial \eta})]$	$x_\xi \frac{\partial P^*}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial P^*}{\partial \xi}$
k	$\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_k}$	$P_k^T - \rho \epsilon$	0
ϵ	$\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon}$	$\frac{\epsilon}{k} (C_1 P_k^T - C_2 \rho \epsilon)$	0

* ϕ tem este valor na equação de conservação da massa, Eq. (2.6)

Uma outra maneira para discretizar as equações diferenciais deste problema é aplicar a técnica dos elementos finitos. Esta técnica, que emprega malhas não-estruturadas, não

apresenta restrições quanto a geometria, o que em princípio tornaria sua aplicação mais indicada para este problema. Mas, tradicionalmente, esta é a única vantagem da metodologia de elementos finitos sobre a metodologia de volumes finitos neste tipo de problema.

Para o uso de coordenadas generalizadas na solução deste problema, as equações governantes do problema, que foram apresentadas na seção anterior usando coordenadas cartesianas, devem ser reescritas para que possam ser aplicadas no plano transformado. Desta forma, as Eq. (2.6), (2.7), (2.8), (2.9) e (2.10) ficam, no plano transformado, da seguinte forma :

$$\frac{1}{J} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U\phi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho V\phi)}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(c_1 \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(c_2 \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(c_2 \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(c_4 \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + S^\phi - P^\phi$$

onde

$$U = uy_\eta - vx_\eta \quad (2.13a)$$

$$V = vy_\xi - ux_\xi \quad (2.13b)$$

$$J = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1} \quad (2.13c)$$

$$c_1 = J(x_\eta x_\eta + y_\eta y_\eta) \quad (2.13d)$$

$$c_2 = -J(x_\eta x_\xi + y_\eta y_\xi) \quad (2.13e)$$

$$c_4 = J(x_\xi x_\xi + y_\xi y_\xi) \quad (2.13f)$$

Quando a malha no plano físico for ortogonal, c_2 será nulo para todo o domínio do plano transformado.

O valor de Γ , S^ϕ e P^ϕ , para as equações no plano transformado, podem ser vistos na tabela 2.2, onde P_k^T é dado por :

$$P_k^T = \mu_T J \left(2 \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (uy_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (uy_\xi) \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (vx_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (vx_\eta) \right]^2 + \right. \quad (2.14)$$

$$\left. \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (vy_\eta - ux_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (ux_\xi - vy_\xi) \right]^2 \right)$$

Condições de Contorno

As equações que definem o problema foram apresentadas nas seções anteriores tanto no sistema cartesiano de coordenadas quanto no sistema de coordenadas generalizadas. Mas para que o modelo matemático fique completo, as condições de contorno devem ser especificadas.

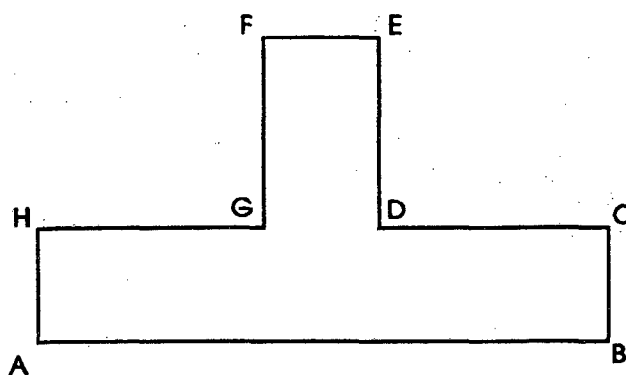


Figura 2.1: Representação esquemática de uma bifurcação

Para todos os problemas resolvidos no presente trabalho somente três tipos de condições de contorno foram aplicadas, quais sejam :

- I. Condições de Contorno de Entrada de Massa;
- II. Condições de Contorno de Saída de Massa; e,
- III. Condições de Contorno de Não Deslizamento nas Paredes;

O primeiro tipo, refere-se à entrada do escoamento no duto na seção \overline{AH} e \overline{BC} da Fig. 2.1. O segundo, na seção \overline{EF} , refere-se às condições de saída do escoamento do duto. O terceiro, refere-se às condições de contorno na parede do duto e informa como estas afetam o comportamento do fluido. Estas condições são aplicadas para os segmentos \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{DE} , \overline{FG} e \overline{GH} . A seguir, será tratado com um maior detalhamento cada um dos tipos de condições de contorno supracitados.

Condições de Contorno de Entrada de Massa

A determinação dos valores de u , v , k e ϵ na região de entrada do escoamento não é uma tarefa simples. Geralmente o valor destas variáveis é obtido através de observações experimentais. Mas, infelizmente, nem todas as quantidades turbulentas podem ser medidas experimentalmente e, por isso, devem ser avaliadas de alguma maneira.

Para o valor da velocidade u optou-se pela escolha de um perfil reto de velocidade ($u = \text{constante}$), pois este perfil é mais próximo do perfil de um escoamento turbulento completamente desenvolvido. Isto foi possível após a verificação que a forma do perfil de velocidade nas entradas do forno não influenciavam o campo de velocidades nas imediações da bifurcação. Evidentemente, esta consideração será falsa se as entradas forem muito próximas à bifurcação ou se houver uma grande diminuição do número de Reynolds do escoamento.

Na entrada, considerou-se que a velocidade v é nula.

O valor da energia cinética turbulenta, k , e da dissipação da energia cinética turbulenta, ϵ , deveriam ser avaliados através de dados experimentais, mas como tal procedimento não foi realizado, estimou-se os valores destas propriedades nas entradas em função de valores conhecidos. Da experiência, sabe-se que a solução não é fortemente dependente destes valores nas entradas do escoamento.

Assim teremos,

$$u = U_{\text{entrada}} \quad (2.15a)$$

$$v = 0 \quad (2.16a)$$

$$k = 10^{-3} U_{\text{entrada}}^2 \quad (2.17a)$$

$$\epsilon = \frac{k^{1,5}}{H} \quad (2.18a)$$

Onde $H = \text{segmento } \overline{AH}$

Os valores de k e de ϵ na entrada são os mesmos que foram apresentados no trabalho de Stephenson [48].

Condições de Contorno de Saída de Massa

Esta condição de contorno é aplicada na saída do escoamento. Neste local, a condição de escoamento localmente parabólico é empregada. As condições de contorno podem ser escritas como,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0 \quad (2.19)$$

Na Eq. (2.19) x representa a direção normal à \overline{EF} .

Condições de Contorno de Não-Deslizamento nas Paredes

Em escoamentos turbulentos os maiores gradientes de velocidades ocorrem nas regiões próximas das paredes. Desta forma para captar estes gradientes deve-se ter uma malha extremamente refinada nestas regiões. Além disto, o modelo k- ϵ usado neste trabalho foi desenvolvido levando-se em conta que os efeitos viscosos podem ser desconsiderados. Isto é verdade na grande maioria dos escoamentos, mas é completamente falso nas regiões próximas das paredes.

Para que não se faça uso de uma malha extremamente refinada, como proposto por Launder [19], e que se possa usar as mesmas equações do escoamento médio em todo o domínio, faz-se uso de uma condição de contorno artificial, proposta por Launder e Spalding [20]. Para a aplicação desta condição de contorno artificial faz-se uso da bem conhecida função de parede (*wall function*). Estas funções de parede são baseadas em dados experimentais de escoamentos em geometrias simples e tentam simular o comportamento viscoso do fluido nas subcamadas existentes próximas às paredes.

Para o presente estudo usou-se as seguintes equações para a aplicação da função parede, obtidas do trabalho de Hackman [12].

$$\tau_w = (\mu + \mu_T) \frac{du}{dy} \quad (2.20)$$

$$v = 0 \quad (2.21)$$

$$\tau_w = \begin{cases} \frac{\rho u \kappa C_\mu^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{2}}}{\ln(Ey^+)} & \text{se } y^+ > 11.63 \\ \frac{\mu L u}{y} & \text{se } y^+ \leq 11.63 \end{cases} \quad (2.22)$$

$$U^+ = \begin{cases} y^+ & \text{se } y^+ > 11.63 \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) & \text{se } y^+ \leq 11.63 \end{cases} \quad (2.23)$$

E, por fim, baseado em constatações experimentais que na região próxima à parede a produção de energia cinética é igual a dissipação desta energia, algumas relações podem ser obtidas :

$$\epsilon = \frac{C_\mu^{\frac{3}{4}} k^{\frac{3}{2}}}{\kappa y} \quad (2.24)$$

onde

$$y^+ = y \frac{C_\mu^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{2}}}{\mu_L} \quad (2.25)$$

e, $\kappa = 0,4187$ e $E = 9,793$.

As relações não são propriamente as condições de contorno do problema, mas através delas, no próximo capítulo, poderemos determinar as condições de contorno na parede para todas as equações diferenciais apresentadas.

CAPÍTULO TRÊS

Solução Numérica

Introdução

No capítulo anterior as equações diferenciais que governam o problema do escoamento turbulento em um duto foram definidas. Mas, até este momento, não existem métodos analíticos que possam fornecer a solução, ou soluções, destas equações nesta geometria específica. Como já mencionado, a alternativa escolhida foi a aplicação do Método de Volumes Finitos como uma forma de obter uma solução aproximada do conjunto de equações diferenciais. Este é precisamente o propósito deste capítulo, qual seja, apresentar como o Método de Volumes Finitos foi empregado para resolver o problema do escoamento turbulento em uma bifurcação.

A segunda seção foi reservada para a apresentação dos coeficientes dos sistemas de equações lineares, que representam as equações governantes do problema escritas de uma forma aproximada, e como foi realizada a discretização dos termos fontes das equações diferenciais.

Na terceira seção, o problema do acoplamento pressão-velocidade é tratado.

A quarta seção mostra, detalhadamente, como as condições de contorno foram discretizadas e aplicadas neste trabalho.

A aplicação da metodologia de multidomínios é tratada na quinta seção deste capítulo e a última seção mostra os critérios de convergência empregados e mais alguns detalhes relevantes da metodologia numérica.

Obtenção das Equações Aproximadas

Devido a inexistência de soluções analíticas para as equações diferenciais que descrevem este problema, seja no plano físico ou no plano transformado, buscou-se, através da aplicação do Método de Volumes Finitos, a solução de um sistema de equações que representa aproximadamente estas equações diferenciais.

A aplicação deste método para a solução de problemas cuja equação diferencial esteja no plano transformado $(\xi - \eta)$ não é nenhuma novidade. Neste trabalho deixaremos de apresentar os passos para a obtenção dos coeficientes da equação diferencial genérica na forma discretizada pois estes se encontram detalhados no trabalho de Mailiska [23].

Para obter o sistema de equações, as seguintes considerações foram feitas :

- Armazenamento das variáveis no volume finito de forma co-localizada;
- Esquema implícito de interpolação temporal; e
- Esquema WUDS [40] para a interpolação espacial.

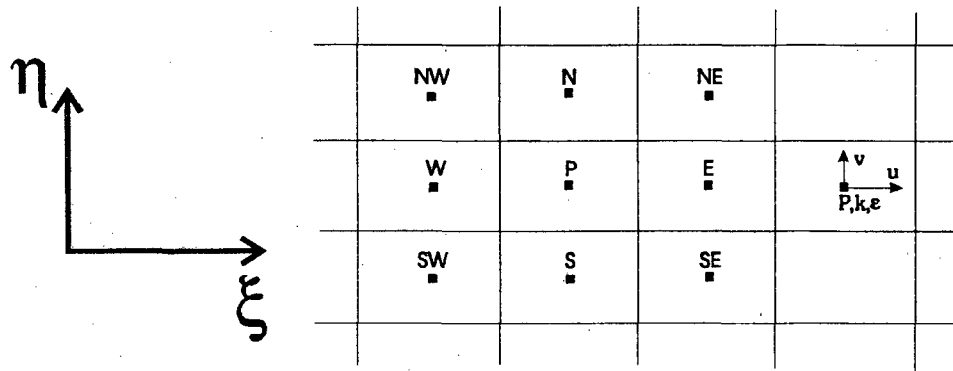


Figura 3.1: Volume finito típico e disposição das variáveis

A Fig. 3.1 mostra o volume finito no plano transformado usado na integração da equação diferencial genérica, Eq. (2.12), e como as variáveis foram localizadas neste volume.

A integração temporal e espacial da equação diferencial genérica, fazendo uso das considerações anteriormente citadas, resultam no seguinte sistema de equações lineares :

$$\left(\frac{\rho}{J_P \Delta t} + A_P^* \right) \phi_P^{n+1} = A_N \phi_N^{n+1} + A_S \phi_S^{n+1} + A_E \phi_E^{n+1} + A_W \phi_W^{n+1} +$$

$$A_{NW} \phi_{NW}^{n+1} + A_{SW} \phi_{SW}^{n+1} + A_{NE} \phi_{NE}^{n+1} + A_{SE} \phi_{SE}^{n+1} + \frac{\rho \phi_P^n}{J_P \Delta t} + \int_w^e \int_s^n \frac{S^\phi - P^\phi}{J} d\eta d\xi \quad (3.1)$$

onde

$$A_N = -M_n|\frac{1}{2} - \alpha_n| + C_{4n}\beta_n + \frac{1}{4} \left(C_{2e}\Gamma_e^\phi - C_{2w}\Gamma_w^\phi \right) \quad (3.2a)$$

$$A_S = M_s|\frac{1}{2} + \alpha_s| + C_{4s}\beta_s + \frac{1}{4} \left(C_{2w}\Gamma_w^\phi - C_{2e}\Gamma_e^\phi \right) \quad (3.2b)$$

$$A_W = M_w|\frac{1}{2} + \alpha_w| + C_{1w}\beta_w + \frac{1}{4} \left(C_{2s}\Gamma_s^\phi - C_{2n}\Gamma_n^\phi \right) \quad (3.2c)$$

$$A_E = -M_e|\frac{1}{2} - \alpha_e| + C_{1e}\beta_e + \frac{1}{4} \left(C_{2n}\Gamma_n^\phi - C_{2s}\Gamma_s^\phi \right) \quad (3.2d)$$

$$A_{SW} = \frac{1}{4} \left(C_{2w}\Gamma_w^\phi + C_{2s}\Gamma_s^\phi \right) \quad (3.2e)$$

$$A_{SE} = -\frac{1}{4} \left(C_{2e}\Gamma_e^\phi + C_{2s}\Gamma_s^\phi \right) \quad (3.2f)$$

$$A_{NW} = -\frac{1}{4} \left(C_{2w}\Gamma_w^\phi + C_{2n}\Gamma_n^\phi \right) \quad (3.2g)$$

$$A_{NE} = \frac{1}{4} \left(C_{2e}\Gamma_e^\phi + C_{2n}\Gamma_n^\phi \right) \quad (3.2h)$$

$$A_P^* = A_N + A_S + A_W + A_E \quad (3.2i)$$

e

$$M_n = \rho V_n \Delta \xi \quad (3.3a)$$

$$M_s = \rho V_s \Delta \xi \quad (3.3b)$$

$$M_e = \rho U_e \Delta \eta \quad (3.3c)$$

$$M_w = \rho U_w \Delta \eta \quad (3.3d)$$

$$|\alpha| = \frac{1}{2} + \frac{Pe^2}{5 + Pe^2} \quad (3.3e)$$

$$\beta = \frac{1 + 0,005Pe^2}{1 + 0,05Pe^2} \quad (3.3f)$$

onde Pe é o número de Peclet da malha, dado pela relação entre o fluxo convectivo e o fluxo difusivo de ϕ em cada volume, definido pela Eq. (3.4), abaixo

$$Pe_n = \frac{M_n}{c_{4n}\Gamma_n^\phi \Delta \xi} \quad (3.4a)$$

$$Pe_s = \frac{M_s}{c_{4s}\Gamma_s^\phi \Delta \xi} \quad (3.4b)$$

$$Pe_e = \frac{M_e}{c_{1e}\Gamma_e^\phi \Delta \eta} \quad (3.4c)$$

$$Pe_w = \frac{M_w}{c_{1w}\Gamma_w^\phi \Delta \eta} \quad (3.4d)$$

Os valores de c_1 e de c_4 foram definidos, respectivamente, pelas Eqs. (2.13d) e (2.13f). Note, também, que os coeficientes poderão ser diferentes, dependendo da variável ϕ escolhida. O valor de α , Eq. (3.3e), deverá sempre possuir o mesmo sinal da velocidade.

Convém relembrar que a variável ϕ pode representar tanto 1, u , v , k como ϵ . Quando $\phi = u$ ou v , equação da conservação do movimento linear na direção ξ e η respectivamente, os coeficientes da Eq. (3.1) dependem das próprias velocidades cartesianas que se pretende conhecer. Isto acontece devido a não-linearidade destas duas equações e como solução para este problema usa-se para o cálculo dos coeficientes os valores de u e v do nível iterativo anterior.

Devido a impossibilidade de apresentar a integração dos termos fontes, S^ϕ , em função de uma equação genérica, tal qual feito com a equação diferencial, estas são apresentadas na tabela 3.1[†]

Tabela 3.1: Termos fontes da Eq. (3.1)

ϕ	$\int_w^e \int_s^n \frac{S^\phi}{J} d\eta d\xi$
u	$[J\mu_{ef}y_\eta(y_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} - x_\eta \frac{\partial v}{\partial \xi}) + J\mu_{ef}y_\xi(y_\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial v}{\partial \eta})]_w^e +$ $[J\mu_{ef}y_\eta(x_\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial u}{\partial \xi}) + J\mu_{ef}y_\xi(x_\xi \frac{\partial v}{\partial \eta} - y_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta})]_s^n$
v	$[J\mu_{ef}x_\eta(x_\eta \frac{\partial v}{\partial \xi} - y_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi}) + J\mu_{ef}x_\xi(x_\eta \frac{\partial v}{\partial \eta} - y_\eta \frac{\partial u}{\partial \eta})]_w^e +$ $[J\mu_{ef}x_\eta(y_\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} - x_\xi \frac{\partial v}{\partial \xi}) + J\mu_{ef}x_\xi(y_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} - x_\xi \frac{\partial v}{\partial \eta})]_s^n$
k	$(\frac{\rho \epsilon_P^0}{J_P k_P^0}) k_P^{n+1}$
ϵ	$\frac{C_1 P_{kP}^T \epsilon_P^0}{J_P k_P^0} - \frac{\rho C_2 \epsilon_P^0 \epsilon_P^{n+1}}{J_P k_P^0}$

O valor de P_{kP}^T , na tabela 3.1, refere-se ao valor de P_k^T , Eq. (2.14), avaliado para o volume P.

O sistema de equações lineares obtido, Eq. (3.1), foi resolvido, inicialmente quando o programa era executado no IBM 3090, usando o algoritmo apresentado por Schneider e Zedam [50]. Contudo, com a mudança de computador para o CONVEX 210 com vetorização, o algoritmo para a solução foi mudado para o TDMA [30], visto que este é mais eficiente em equipamentos que disponham da capacidade de vetorização.

[†] A integração do termo fonte de k e de ϵ foi feita segundo a recomendação de Raithby [39]. O superíndice "0", indica que a propriedade está sendo avaliada no nível de iteração anterior.

Acoplamento Pressão-Velocidade

A necessidade de tratar o acoplamento pressão-velocidade surge em virtude do método segregado de solução das equações diferenciais. Cada equação diferencial é resolvida separadamente desacoplando a equação que está sendo resolvida das demais equações.

Em um recente trabalho, França F^o [10] apresenta um detalhado estudo sobre os métodos de acoplamento entre a pressão e a velocidade fazendo uso de coordenadas generalizadas. Neste trabalho pode-se encontrar, explicitamente, como aplicar os diversos métodos de acoplamento pressão-velocidade para programas que usam coordenadas generalizadas. Por esta razão não serão apresentados as equações do método SIMPLEC [51], o método de acoplamento entre a pressão e a velocidade usado neste presente trabalho, pois o mesmo já se encontra bem documentado no trabalho de França F^o anteriormente citado.

Condições de Contorno

No capítulo anterior as condições de contorno foram apresentadas. Mas para que o Método de Volumes Finitos possa ser aplicado, as condições de contorno necessitam ser reescritas de forma a adequá-las ao uso do Método de Volumes Finitos e do modelo $k-\epsilon$ de turbulência.

Existem várias maneiras para escrever as condições de contorno quando da aplicação do Método de Volumes Finitos. Fazer uso de volumes fictícios é uma destas maneiras. Apesar do inconveniente de aumentar a memória computacional necessária, este procedimento tem sido usado em larga escala, principalmente em problemas bidimensionais. Como, usando volumes fictícios, todos os volumes finitos do domínio físico passam a ser volumes internos do domínio computacional, há uma diminuição na quantidade de testes lógicos necessários no código computacional se compararmos com outras maneiras de escrever as condições de contorno. Esta diminuição no tempo deverá ser maior ainda nos novos modelos de computadores capazes de vetorizar os códigos computacionais.

Todas as condições de contornos foram apresentadas no capítulo anterior, desta forma as seções seguintes tratarão de mostrar de que maneira devemos reescrevê-las para que o Método dos Volumes Finitos possa ser corretamente aplicado.

Condições de Contorno de Entrada de Massa

As equações para u , v , k e ϵ para esta região são as seguintes :

$$u_P = u_{\text{prescrito}} \quad (3.5a)$$

$$v_P = 0 \quad (3.5b)$$

$$k_P = 10^{-3} u_P^2 \quad (3.5c)$$

$$\epsilon_P = \frac{k_P^{\frac{3}{2}}}{H} \quad (3.5c)$$

onde H é a altura do duto.

Note que as condições de contorno na entrada do escoamento não são aplicadas exatamente na entrada do escoamento do plano físico. Para ser preciso, o correto seria a avaliação das propriedades na face este do volume P. Mas, a escolha de um ou de outro procedimento não causa diferença significativa no resultado final obtido.

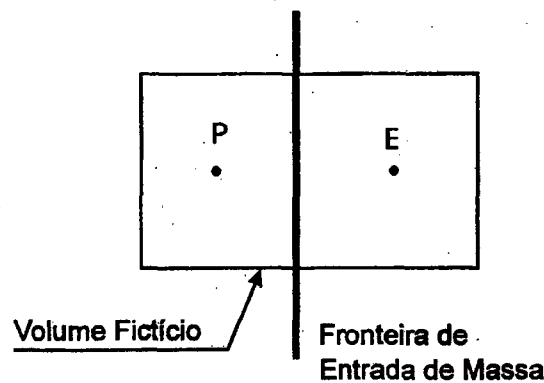


Figura 3.2: Volume finito na região de entrada de massa

A Fig. 3.2 mostra os volumes finitos numa região de entrada de massa situada, como exemplo, na fronteira oeste do domínio.

Condições de Contorno de Saída de Massa

As condições de contorno, na forma discretizada, na fronteira de saída de massa fica da seguinte forma :

$$u_P = u_S \quad (3.6a)$$

$$v_P = v_S \quad (3.6b)$$

$$k_P = k_S \quad (3.6c)$$

$$\epsilon_P = \epsilon_S \quad (3.6d)$$

A Fig. 3.3 mostra os volumes finitos numa região de saída de massa situada, a título de exemplo, na fronteira norte do domínio.

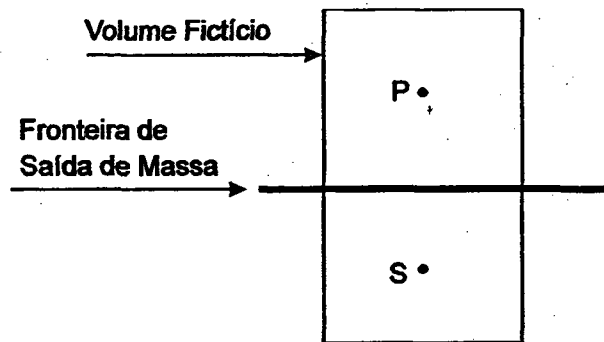


Figura 3.3: Volume finito na região de saída de massa

Condições de Contorno de Não-Deslizamento nas Paredes

Esta é a condição de contorno que afeta com uma maior intensidade o escoamento. Os termos de produção e dissipação de energia cinética, presentes nas equações de k e ϵ , são fortemente afetados pela presença de paredes. A Fig. 3.4 mostra os volumes finitos em uma região próxima a uma parede.

Baseado nas Eqs. (2.20)–(2.25) pode-se escrever as condições de contorno para a velocidade u aproximando o valor de τ_w da seguinte forma :

$$\tau_w = (\mu + \mu_T) \frac{u_N - u_P}{2y_P} \quad (3.7)$$

desta forma pode-se escrever a equação para a velocidade u como

$$u_P = u_N - 2 \frac{\tau_w y_P}{\mu + \mu_T} \quad (3.8)$$

O valor de τ_w é definido usando a Eq. (2.20),

$$\tau_w = \begin{cases} \frac{\rho u_N \kappa C_\mu^{\frac{1}{4}} k_N^{\frac{1}{2}}}{\ln(Ey_P^+)} & \text{se } y^+ > 11.63 \\ \frac{\mu_L u_N}{y_P} & \text{se } y^+ \leq 11.63 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$y_P^+ = y_P \frac{C_\mu^{\frac{1}{4}} k_N^{\frac{1}{2}}}{\mu_L} \quad (3.10)$$

A equação da velocidade v , Eq. (2.21), fica da seguinte maneira :

$$v_P = -v_N \quad (3.11)$$

De forma análoga pode-se obter estas equações para as outras fronteiras do domínio. As Eqs. (3.8) e (3.11) só valem quando a fronteira não está inclinada, como na Fig. 3.4. A equação para situações onde há inclinações é deduzida no Apêndice B.

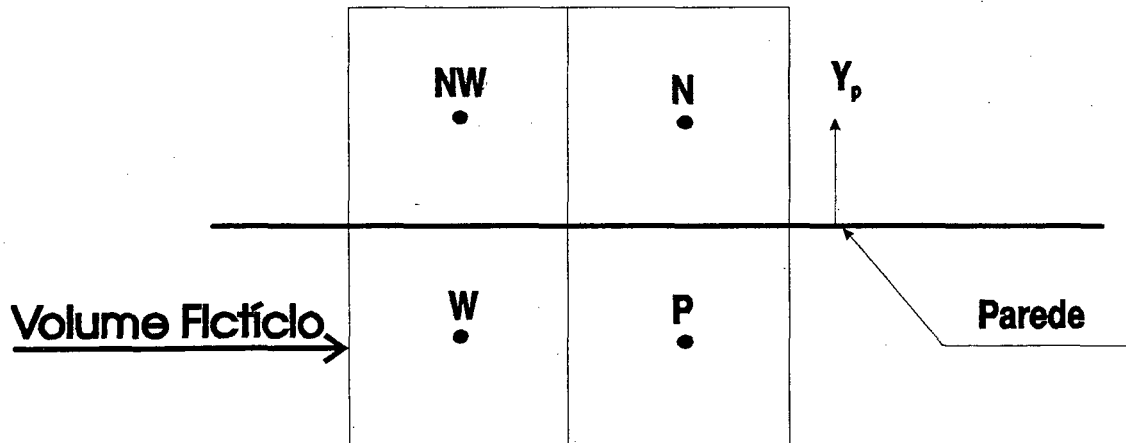


Figura 3.4: Região próxima à parede

O termo fonte da equação de conservação da energia cinética, P_k^T , é avaliado de forma diferente da apresentada na Eq. (2.14) para os primeiros volumes próximos à parede. Isto acontece porque, da forma como foi escrito, este termo não reproduz os grandes gradientes que ocorrem nesta região. Para que estes gradientes pudessem ser captados há

a necessidade de um grande refinamento na malha nesta região. Segundo Hackman [12] este termo deve ser avaliado da seguinte forma

$$\int_w^e \int_s^n \frac{S^\phi}{J} d\eta d\xi = \frac{\tau_w u_P}{y_P J_P} - \rho C_\mu^{\frac{3}{4}} \left(k_P^{\frac{1}{2}} k_P \right) \frac{U^+}{y_P J_P} \quad (3.12)$$

onde U^+ foi definido na Eq. (2.23).

A Eq. (2.12) para $\phi = \epsilon$ também não descreve corretamente os efeitos de dissipação na região próxima à parede. Como visto no capítulo anterior, a Eq. (2.24) deve ser aplicada para esta região. Ou seja, para os primeiros volumes próximos à parede deve-se substituir esta equação por

$$\epsilon = \frac{C_\mu^{\frac{3}{4}} k_N^{\frac{3}{2}}}{\kappa y_P} \quad (3.13)$$

A Eq. (2.11c) que define a viscosidade turbulenta também não é válida para os primeiros volumes próximos à parede. Em seu lugar deve-se usar a seguinte equação :

$$\mu_T = \begin{cases} \rho \kappa y_P \sqrt{\left| \frac{\tau_w}{\rho} \right|} & \text{se } y^+ > 11.63 \\ 0,1 \mu_L & \text{se } y^+ \leq 11.63 \end{cases} \quad (3.14)$$

Aplicação da Metodologia de Multidomínios

A aplicação do Método de Volumes Finitos em problemas cujas geometrias foram discretizadas usando vários domínios não é algo recente. Esta é uma ferramenta que, usando sistemas de coordenadas convencionais, permite a solução de problemas envolvendo geometrias com um certo grau de complexidade. Desta forma, os pesquisadores que usavam Volumes Finitos para discretizar os seus problemas puderam simular escoamentos em geometrias que não resolviam até então, mas fazendo uso de dois ou mais domínios e de um ou mais sistemas de coordenadas ortogonais [38].

A motivação para a Metodologia de Multidomínios não está restrita à aplicação em geometrias complexas. Pode-se usá-la, por exemplo, quando se deseja estudar o comportamento de dois fluidos imiscíveis. Assim o comportamento de um dos fluidos é determinado em um dos subdomínios enquanto o do outro fluido é estudado pelo outro subdomínio.

A possibilidade de representar um domínio de geometria complexa usando um único sistema de coordenadas foi o principal fator para a difusão e o desenvolvimento de coordenadas generalizadas. Isto pode ser facilmente comprovado folheando os recentes números de revistas como o *Numerical Heat Transfer* ou *Computers & Fluids*, entre outras.

Mas apesar da grande variedade de geometrias que se pode discretizar usando coordenadas generalizadas, há aquelas que não são corretamente mapeadas por esta metodologia, como no caso apresentado pela Fig. 1.2.

A alternativa para este tipo de problema é a subdivisão do domínio em dois ou mais subdomínios e gerar as coordenadas destes subdomínios usando a técnica de coordenadas generalizadas. Com a aplicação conjunta destas duas ferramentas, coordenadas generalizadas e multidomínios, a geometria passa a não ser mais um limitante na solução de problemas onde o Método dos Volumes Finitos é aplicado.

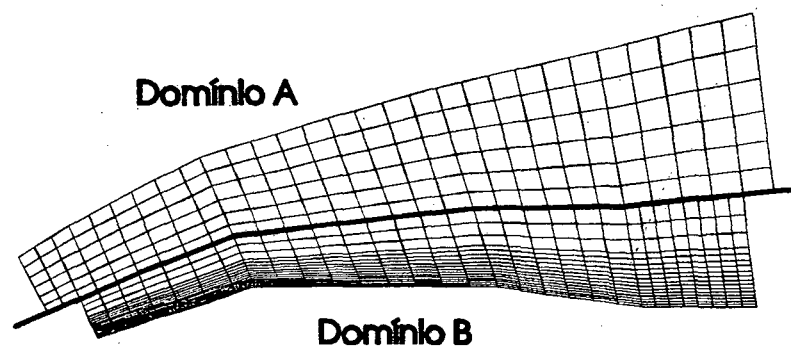


Figura 3.5: Multidomínios sem região de intersecção

Existem duas formas distintas de se aplicar a metodologia de multidomínios. A primeira delas é a que faz com que em cada subdomínio vizinho não exista uma região de intersecção, como ilustra a Fig. 3.5 [25] onde a linha em negrito representa a fronteira de cada uma das duas malhas. Isto permite que cada um dos subdomínios tenha sua malha completamente independente dos outros subdomínios. Isto pode ser visto claramente na parte direita da malha da Fig. 3.5. As informações de um domínio são passadas para o seu domínio vizinho através de alguma interpolação.

A segunda forma de aplicação de multidomínios é fazer com que exista uma região de malha comum entre subdomínios vizinhos, criando uma dependência entre as malhas dos

mesmos. Este procedimento, aumenta o tempo de solução das equações para uma iteração de todo o domínio, mas nada se pode afirmar quanto ao tempo total necessário para obter a solução do problema. A grande vantagem deste procedimento é que não há necessidade de interpolações para transferir as informações de um subdomínio para o seu vizinho, embora seja perdida a possibilidade de se obter malhas completamente independentes para cada subdomínio.

Este segundo tipo de aplicação de multidomínios apresenta um acoplamento bem mais forte entre as soluções de cada um dos subdomínios e por esta razão foi o procedimento escolhido para ser usado neste trabalho.

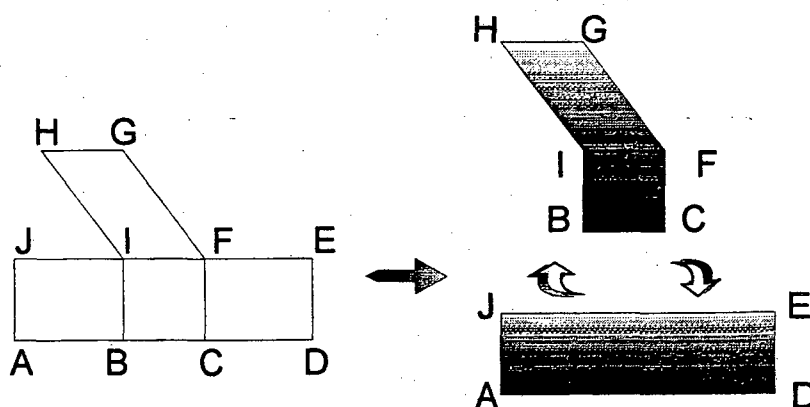


Figura 3.6: Esquema da bifurcação e seus 2 subdomínios

O princípio do uso de multidomínios está na subdivisão do domínio que se pretende estudar em dois ou mais subdomínios. Cada um destes subdomínios tem o seu sistema de coordenadas independente. Com a subdivisão, cada um dos subdomínios passa a ter uma ou mais partes de suas fronteiras cuja condição de contorno é desconhecida.

A Fig. 3.6 mostra esquematicamente como o domínio de cálculo foi dividido em duas partes. No primeiro domínio todas as condições de contorno são conhecidas, com exceção da região da fronteira referente ao segmento \overline{IF} . Por sua vez, no segundo domínio não são conhecidos os valores das condições de contorno para os segmentos \overline{BI} e \overline{CF} . Para a avaliação destas condições de contorno, para este problema, faz-se uso de um processo iterativo que tem a seguinte forma :

1. Arbitram-se os valores iniciais para todas as variáveis do problema em cada um dos subdomínios;
2. Resolvem-se todas as equações no primeiro subdomínio. Para se obter a condição de contorno nas fronteiras com o outro subdomínio, faz-se uso de interpolação,

caso não exista uma região comum a ambos os domínios, ou simplesmente prescrevem-se na fronteira os valores das propriedades conhecidas no outro volume. Desta forma há o acoplamento físico entre este subdomínio e o seu vizinho.

3. Resolvem-se todas as equações do segundo subdomínio. Novamente haverá uma região cujo valor não se conhece em nenhum lugar do contorno. Desta forma faz-se uso de interpolação, caso não exista uma região comum a ambos os domínios, ou simplesmente prescreve-se na fronteira os valores das propriedades conhecidas no outro volume. Isto tem que ser feito com os valores mais recentes das variáveis calculadas no ítem 2.
4. Itera-se o item 2 e 3 até que a solução de cada um dos subdomínios não se altere mais, segundo algum critério de convergência.

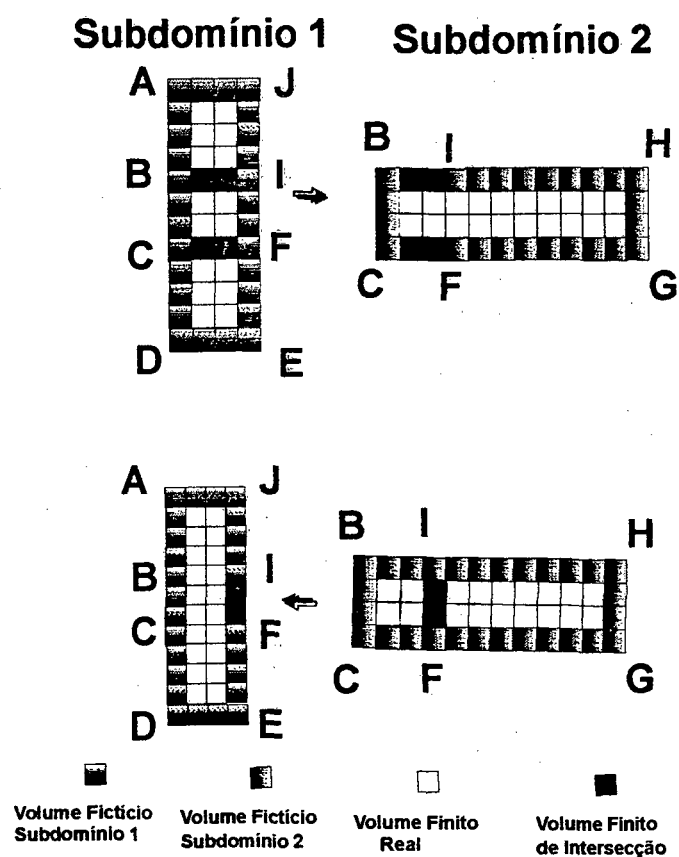


Figura 3.7: Esquema da bifurcação e seus 2 subdomínios

Este processo iterativo é visto na Fig. 3.7. A primeira parte representa a determinação das propriedades no primeiro subdomínio e quais volumes que terão suas variáveis usadas

pelo segundo subdomínio. A segunda parte, o processo inverso, ou seja, o cálculo das variáveis no segundo subdomínio e quais destes volumes serão usados como condição de contorno pelo primeiro subdomínio. Nesta figura, os volumes de intersecção representam aqueles volumes que são volumes internos em um subdomínio e são volumes fictícios no outro. Nestes volumes é que são feitas as transferências de informações de um subdomínio para o outro.

Deve ser enfatizado que o acoplamento geométrico do problema é feito através das malhas, mas o acoplamento físico do problema é feito, de forma iterativa, usando a solução de um subdomínio para calcular as condições de contorno do outro subdomínio e vice-versa.

Como todas as variáveis deste problema estão armazenadas no mesmo lugar no volume finito, não há maiores dificuldades na implementação da solução em multidomínios, partindo-se de um programa que está preparado para a solução de problemas usando um único domínio. Mas, para o problema alvo deste trabalho, alguns detalhes merecem ser mencionados :

- A região comum aos dois domínios foi feita de tal forma a minimizar o número de fronteiras com condições de contorno desconhecidas, mas com o requisito de existir uma região comum aos dois subdomínios. Isto fez com que a região de intersecção entre os domínios crescesse. Como, na região de intersecção, as equação governantes são resolvidas para os dois domínios, o tempo computacional exigido para se completar uma iteração englobando os dois domínios é maior. Mas, nada se pode afirmar sobre o tempo total de solução do problema, visto que, como na região crítica as variáveis são resolvidas duas vezes, esta região deve convergir mais rapidamente para o resultado final.
- Como pode ser visto na Fig. 3.7, há alguns volumes que são fictícios em um subdomínio e são volumes internos no outro subdomínio. Deve-se tomar o cuidado para que estes volumes sejam iguais para que possam ter as mesmas métricas.
- Deve-se tomar cuidado ao se transferir uma informação de um subdomínio para outro. Dependendo do sistema de referencia usado, uma velocidade pode ser positiva em um subdomínio e ser negativa no outro.

O processo de transferência do valor de uma variável de um subdomínio para o outro é feito da seguinte forma :

- Como o volume fictício, nesta região, coincide com um volume interno do outro subdomínio, é dito, na subrotina que calcula as condições de contorno, que o valor da variável em uma determinada fronteira é igual ao valor desta variável no volume fictício, que por sua vez corresponde ao valor desta mesma variável calculado no outro subdomínio.

Critérios de Convergência

O critério de convergência usado neste trabalho foi o mesmo usado por Dimitriadis [6] em sua tese de doutorado. Primeiramente é feito um balanço de massa para cada volume finito de cada um dos subdomínios. O resíduo deste balanço de massa é dividido pelo fluxo de massa representativo da seção, que nada mais é que o fluxo de massa que passa na seção dividido pelo número de volumes desta seção. Se o resultado desta operação for menor que 0.01%, para todos os volumes, um dos critérios de convergência terá sido satisfeito.

O segundo critério é o que garante que as variáveis u , v , k e ϵ não variam nas fronteiras que ligam um subdomínio ao outro. Se em duas iterações sucessivas, estas variarem menos de 1%, em todos os volumes que fazem fronteira, será considerado que este critério de convergência foi satisfeito.

O processo iterativo só foi considerado convergido quando ambos os critérios de convergência foram satisfeitos.

CAPÍTULO QUATRO

Validação do Modelo Numérico

Introdução

Neste capítulo alguns resultados são apresentados com o objetivo de demonstrar que as equações e o código computacional para resolver o problema do duto com bifurcação estão corretos. A necessidade de testes para qualificar o programa é demonstrada na segunda parte deste capítulo.

Na terceira parte pode-se encontrar o primeiro dos testes analisados. Trata-se da solução do escoamento turbulento entre placas planas paralelas.

E, para concluir, trabalhos encontrados na literatura que tratam sobre escoamento laminar em bifurcações são comparados.

Necessidade de Validar o Programa Computacional

O código computacional desenvolvido, baseado nas equações apresentadas no segundo capítulo, originou-se de um programa anteriormente preparado para a determinação do campo de velocidades e temperaturas para escoamentos em qualquer regime de velocidade [45], desenvolvido pelo SINMEC.

Para que o programa pudesse ser usado neste trabalho, solução de um escoamento incompressível e turbulento, algumas alterações no programa original fizeram-se necessárias. Cita-se, como exemplo, a inclusão das equações do modelo $k-\epsilon$ de turbulência, a eliminação

da dependência da massa específica com a temperatura ou ainda a inclusão do esquema de solução usando multidomínios.

Após a realização destas alterações na estrutura do programa original, uma série de testes foram programados. Estes testes serviram para eliminar eventuais erros de formulação e de programação que ainda pudessem existir e garantir o funcionamento do esquema de solução usando multidomínios.

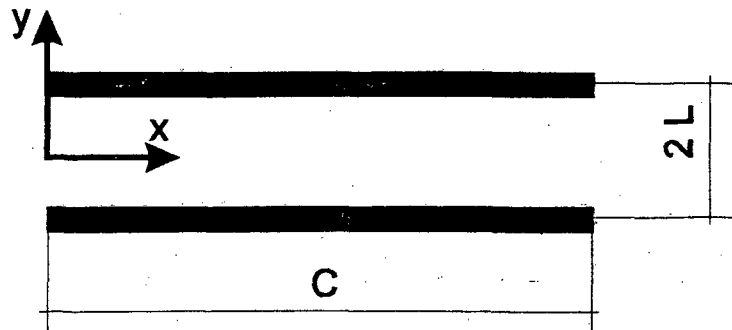


Figura 4.1: Geometria do problema de placas planas paralelas

Os problemas cujas soluções foram investigadas e que satisfaziam os objetivos anteriormente citados são :

- Escoamento Turbulento entre Placas Planas Paralelas; e
- Escoamento Laminar em Bifurcações.

Cada um destes escoamentos acima citados possui uma determinada característica que o tornou muito importante para o estudo do escoamento em uma bifurcação. A razão que nos levou a selecionar cada um destes problemas será comentada nas próximas seções.

Escoamento Turbulento Entre Placas Planas Paralelas

O escoamento turbulento entre placas planas paralelas foi o primeiro dos testes elaborados para eliminar os erros de programação existentes.

Este é um problema cuja característica principal é a simplicidade. Trata-se de um escoamento turbulento, por isso todas as equações do modelo $k-\epsilon$ são testadas, mas que

não traz dificuldade alguma na geração de malhas e não requer um tempo computacional muito elevado. Apesar disto, pode-se afirmar que quando a solução correta do escoamento turbulento entre placas planas paralelas for encontrada, as equações do modelo $k-\epsilon$ deverão estar corretas. Um esquema da geometria estudada pode ser visto na Fig. 4.1.

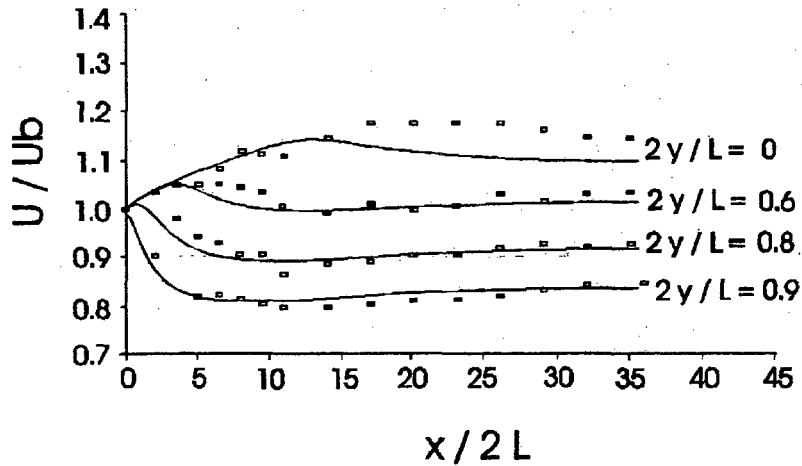


Figura 4.2: Escoamento turbulento entre placas planas e paralelas

Uma única referência foi usada na solução do escoamento entre duas placas planas paralelas. Trata-se do artigo de Stephenson [48]. Escrito faz alguns anos, este artigo traz a solução do problema hidrodinâmico e térmico para um fluido escoando de forma turbulenta entre placas planas paralelas e divergentes.

Apesar do artigo de Stephenson ser um trabalho onde há um enfoque numérico do problema, muitos dados experimentais originados de outras referências podem ser encontrados e, entre eles o trabalho de Byrne *et alli* [4]. E foram precisamente com estes dados experimentais que foram feitas as comparações que confirmaram que as equações de turbulência utilizadas foram implementadas de forma correta.

A Fig. 4.2 mostra uma curva com o comportamento do campo de velocidade para várias posições, tanto na direção x quanto na direção y . O comprimento da placa, C , é igual a 3.66 m e a distância entre as placas, $2L$, igual a 0.051 m. O número de Reynolds do problema usado na comparação é igual a 140.000. As condições de contorno usadas neste problema foram :

$$\begin{aligned}
U_{entrada} &= f(Re_{2L}) \\
V_{entrada} &= 0 \\
k_{entrada} &= 0 \\
\epsilon_{entrada} &= 0
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{saida} = \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{saida} = \left. \frac{\partial k}{\partial x} \right|_{saida} = \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right|_{saida} = 0$$

Função parede foi usado para a avaliação das variáveis nas paredes da placa plana. Propositamente, não se fez uso da simetria do problema quando da computação dos resultados apresentados.

Na Fig. 4.2 os pontos no gráfico correspondem aos resultados experimentais de Byrne *et alli* [4] que é apresentado no trabalho de Stephenson [48]. Os resultados concordam satisfatoriamente com o experimento de Byrne *et alli* com uma maior discordância na região central entre as duas placas, $y = 0$. Mesmo assim, os resultados obtidos neste trabalho são melhores que os obtidos numericamente por Stephenson [48].

Escoamento Laminar em Bifurcações

Na literatura especializada há uma dificuldade muito grande para se comparar soluções de escoamento turbulento em bifurcações. Alguns trabalhos mostram soluções tridimensionais [37], outros, que tratam de situações bidimensionais [6,21], apresentam os seus resultados em forma de vetor velocidade, o que é praticamente impossível comparar.

A solução encontrada foi a de comparar com situações envolvendo escoamentos laminares, como os apresentados nos trabalhos de Kawaguti e Hamano [18] e Hayes *et alli* [15]. Contudo, mesmo para estes artigos a comparação não foi uma tarefa fácil. Os resultados destes trabalhos foram apresentados, na sua grande maioria, em forma de linhas de corrente. Para apresentar a comparação feita neste trabalho, as linhas de corrente apresentadas em [18] e [15] foram copiadas fazendo uso de um scanner.

Kawaguti e Hamano [18] trabalharam com número de Reynolds muito baixo, pois o objetivo de seu trabalho é simular o comportamento do sangue humano. Mas, as geometrias estudadas neste trabalho se prestam bastante para testar o programa, visto que nem todas

as bifurcações estudadas tem um ângulo de 90° . Estas bifurcações em forma de “Y” são ideais para saber se os termos não-ortogonais foram corretamente discretizados no programa computacional.

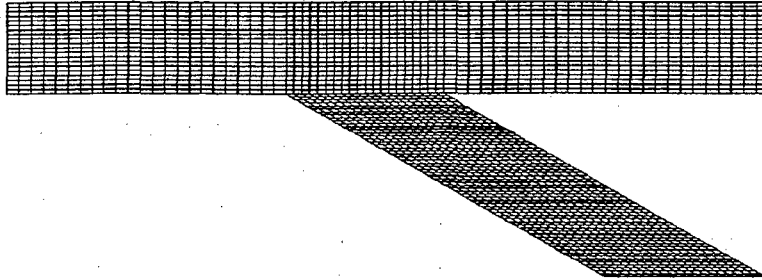


Figura 4.3: Malha da bifurcação 82x22 e 22x82

A malha usada para a solução deste problema é vista na Fig. 4.3. Trata-se de uma malha de 82x22 volumes, incluindo os volumes fictícios, para o domínio horizontal e 22x82 volumes para o vertical.

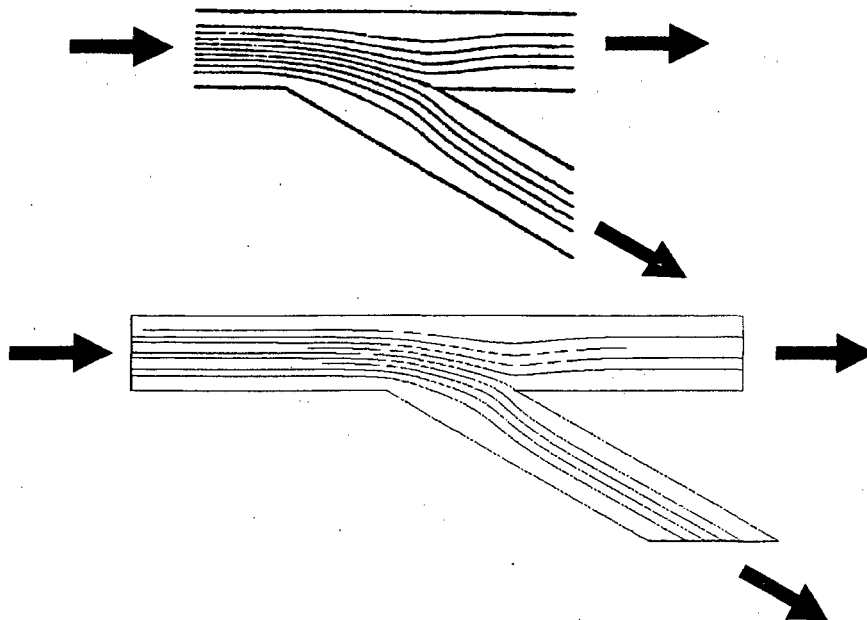


Figura 4.4: Escoamento Laminar em uma bifurcação com número de Reynolds = 32 e 30° de ângulo

Os resultados foram bastantes satisfatórios, como pode ser visto na Fig. 4.4. Para este problema, o número de Reynolds baseado na altura do duto horizontal vale 32 e o ângulo de bifurcação é de 30° . A figura superior é uma digitalização da Fig 3 do trabalho de Kawaguti e Hamano [18], enquanto a inferior é a apresentação dos resultados por nós obtidos usando o visualizador ISO-3D [24].

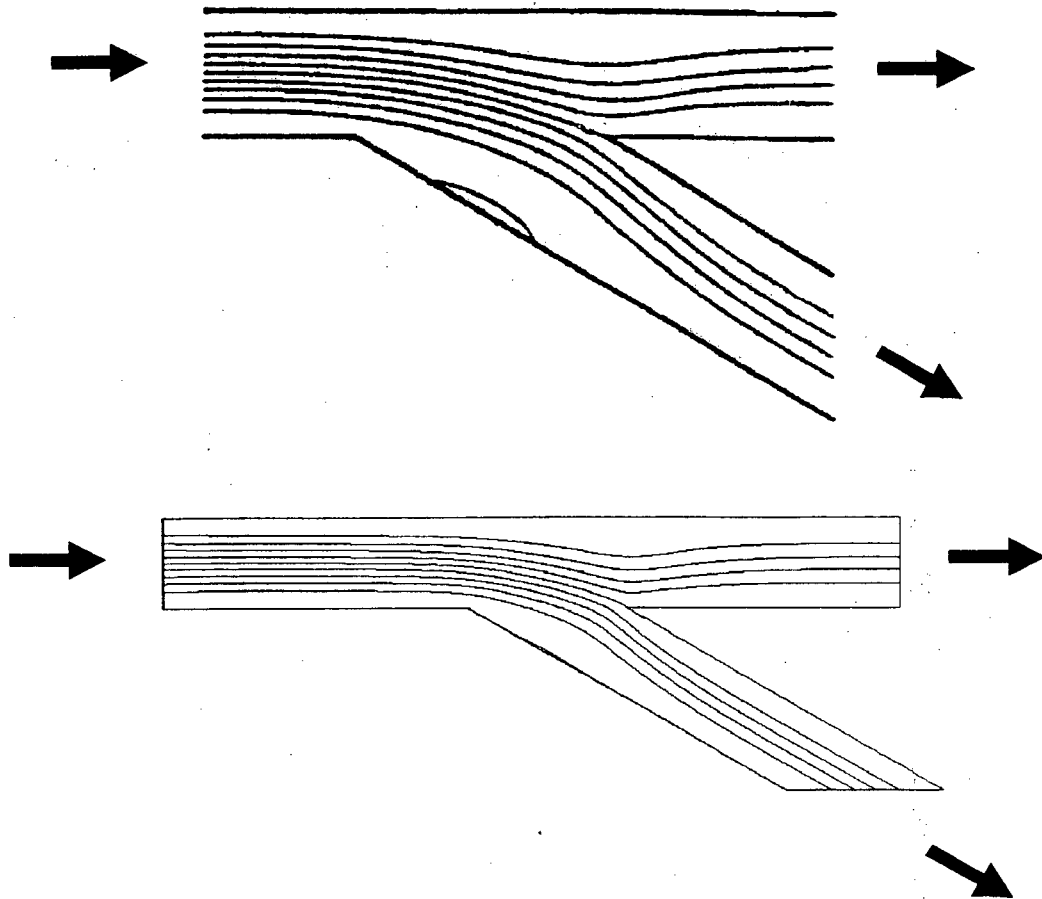


Figura 4.5: Escoamento Laminar em uma bifurcação com número de Reynolds = 64 e 30° de ângulo

Com um número de Reynolds maior, 64, mas com o mesmo ângulo, foi comparado outra solução do trabalho de Kawaguti e Hamano. A malha usada foi a mesma usada no problema anterior. A Fig. 4.5 mostra as linhas de correntes para este problema, a superior é a Fig. 10 digitalizada do artigo de Kawaguti e Hamano, enquanto a inferior representa as linhas de correntes obtidas neste trabalho. Com exceção feita a uma pequena recirculação que aparece no trabalho de Kawaguti e Hamano, as outras isolinhas conferem muito bem.

As Figs. 4.6 e Fig. 4.7 mostram a solução, para um ângulo de bifurcação de 150° , de um escoamento com o número de Reynolds igual a 32 e 64, respectivamente. Novamente, os resultados se apresentaram muito bons.

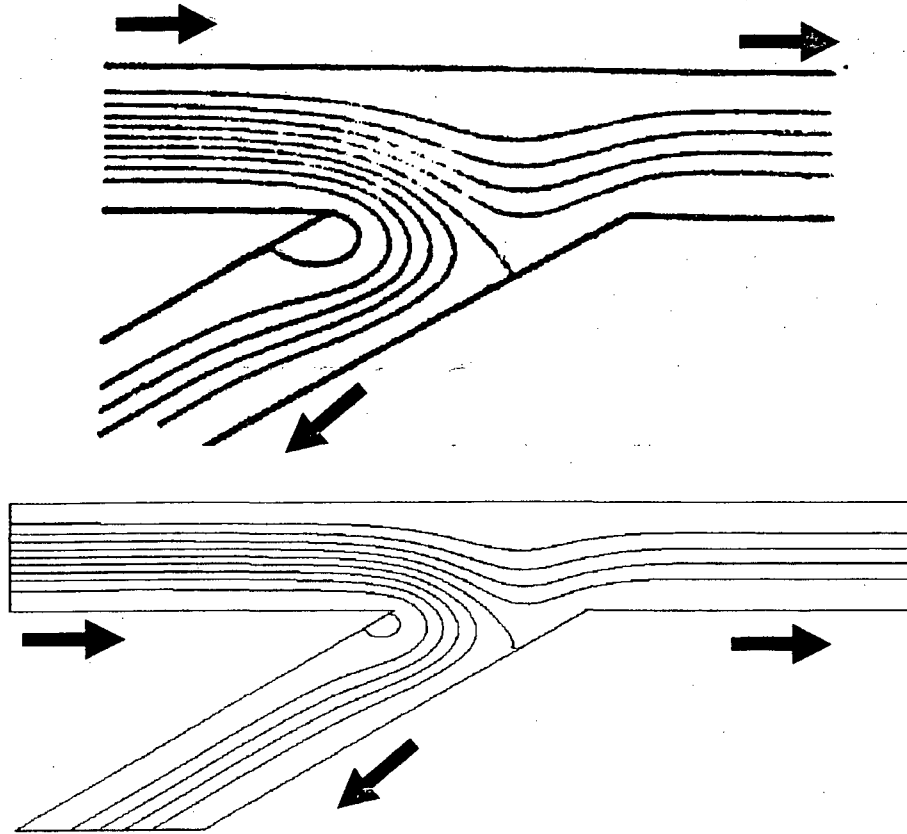


Figura 4.6: Escoamento laminar em uma bifurcação com número de Reynolds = 32 e 150° de ângulo

Para concluir os testes o escoamento em uma bifurcação de 90° foi estudado, utilizando-se do trabalho de Hayes *et alli* [15].

Os resultados que são apresentados referem-se a um problema com número de Reynolds igual a 300. O que difere em cada um dos três casos apresentados é a quantidade de massa que passa por uma ou por outra bifurcação.

Na Fig. 4.8 80% da massa passa pelo duto horizontal e somente 20% continua no duto vertical. Na Fig. 4.9 50% da massa escoa pelo no duto vertical e, conseqüentemente, os outros 50% pelo duto horizontal. E por fim, na Fig. 4.10 ocorre a situação inversa ao que ocorre na Fig. 4.8, ou seja, 80% da massa escoa pelo duto vertical e 20% pelo duto horizontal.

A concordância nos três casos pode ser considerada boa, o que nos garante que a metodologia de multidomínios implementada no programa funciona corretamente.

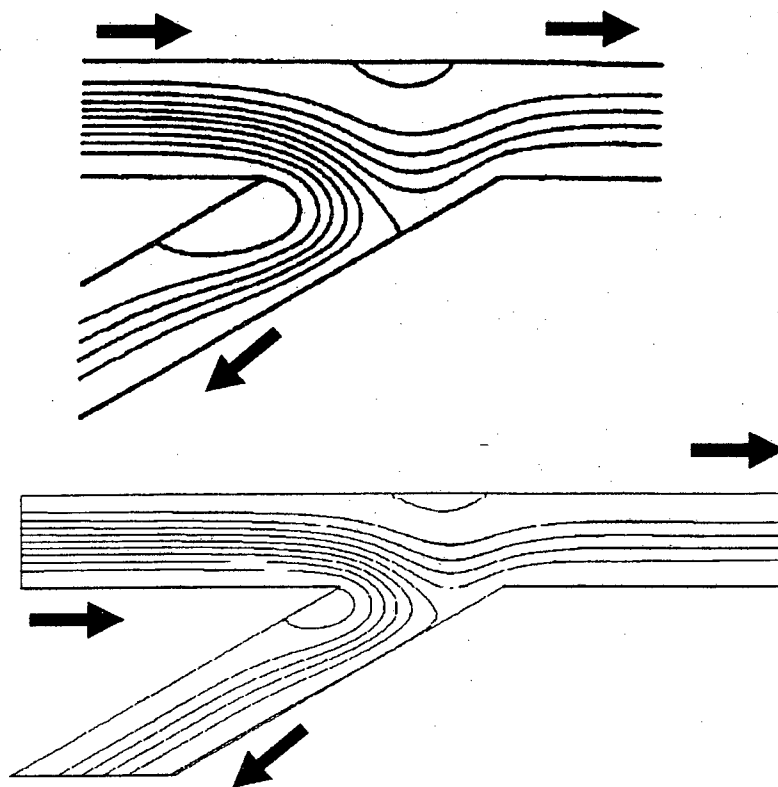


Figura 4.7: Escoamento Laminar em uma bifurcação com número de Reynolds = 64 e 150° de ângulo

Para todos os problemas de bifurcação resolvidos neste capítulo, as condições de contorno foram exatamente as mesmas, ou seja :

- Fluxo prescrito na entrada do escoamento;
- Fluxo localmente parabólico nas duas saídas do escoamento; e
- Velocidade nula em todas as paredes - condição de não-eskorregamento.

Quanto ao tempo de CPU necessário para a solução do problema, usando um computador CONVEX 210 com vetorização, para soluções laminares ele nunca foi superior a 60 minutos mas também nunca foi inferior a 30 minutos.

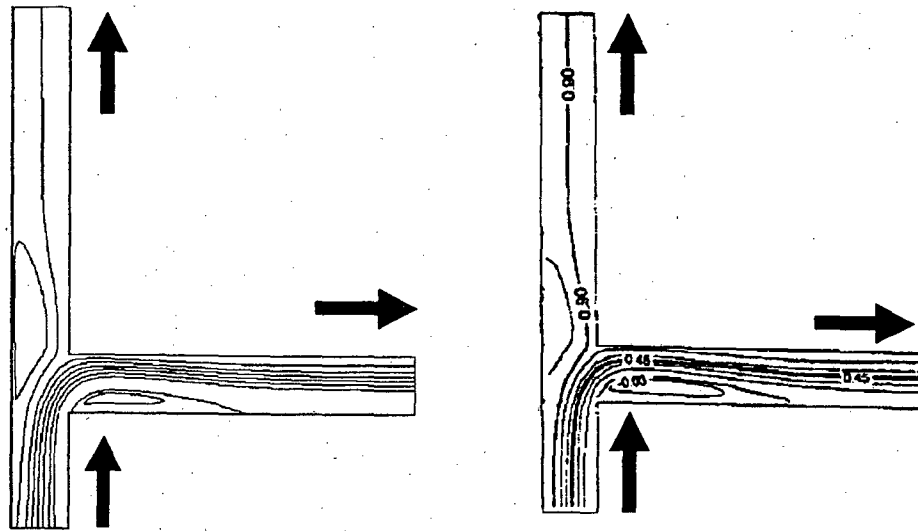


Figura 4.8: Escoamento Laminar – 20% da massa no duto vertical

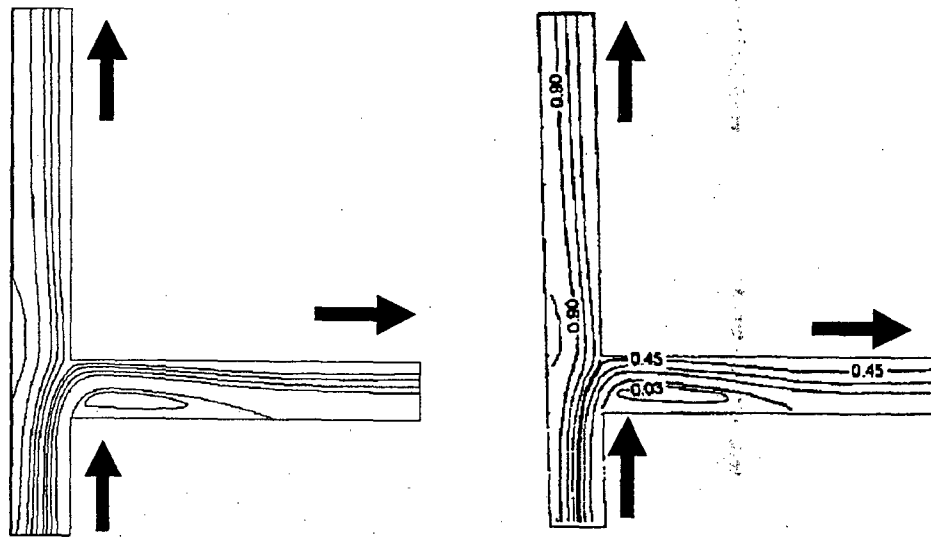


Figura 4.9: Escoamento Laminar – 50% da massa no duto vertical

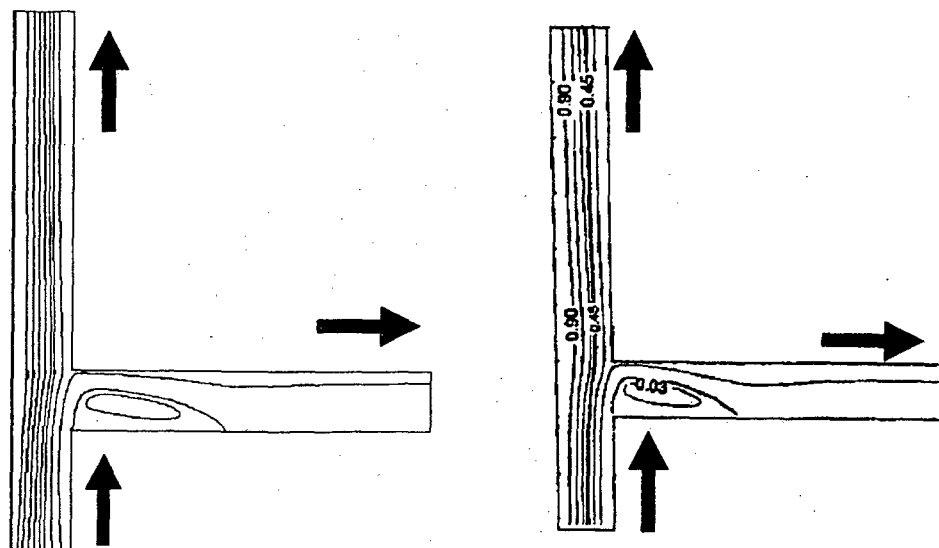


Figura 4.10: Escoamento Laminar – 80% da massa no duto vertical

Aplicação da Metodologia a uma Bifurcação

Introdução

Nos capítulos precedentes toda a formulação matemática e toda a modelação numérica referentes ao problema do escoamento turbulento em uma bifurcação foram apresentadas. Testes foram realizados com o propósito de qualificar o código computacional baseado no modelo numérico apresentado.

Para completar o presente trabalho, alcançando os objetivos traçados no primeiro capítulo, um estudo sobre o comportamento do fluido no interior de um duto contendo uma bifurcação foi elaborado e será apresentado nas próximas seções deste capítulo. E dentre as incontáveis situações onde pode-se encontrar um fluido escoando em uma bifurcação a escolhida foi a do escoamento turbulento no interior do forno de uma esmaltatriz.

Fabricar fios de cobre esmaltado é uma atividade que é realizada por diversas empresas no mundo. Para a produção destes fios, barras de cobre são trefiladas diversas vezes até que a bitola desejada seja alcançada. Feito isto, o fio é esmaltado e, em seguida, passa pelo forno da esmaltatriz. Este forno é um duto de grande comprimento onde, em seu interior, passam fios de cobre e ar quente na direção oposta ao movimento destes fios. É nele que se processa a cura do esmalte. O esmalte, que recobre o fio em uma ou mais camadas, é uma combinação de vários solventes, que conferem ao esmalte a fluidez necessária à sua aplicação, e vários solutos, que irão conferir ao fio esmaltado algumas das características eletro-mecânicas desejadas. A aplicação do esmalte, por exemplo, garante ao fio esmaltado o isolamento elétrico.

Como visto, o processo de esmaltação, do ponto de vista físico-químico, é bastante complexo e, do ponto de vista econômico, importante na determinação do preço final do produto. Desta forma, para se desenvolver novas tecnologias onde o fio esmaltado tenha uma qualidade superior à existente atualmente, o processo como um todo deve merecer um estudo detalhado. Deve-se, por exemplo :

- Realizar um profundo estudo físico-químico do esmalte para que, com o uso deste esmalte, seja possível obter um fio esmaltado dentro das especificações eletro-mecânicas desejadas;
- Conhecer os mecanismos de evaporação dos solventes no interior da esmaltatriz com o intuito de otimizar parâmetros geométricos quando do projeto do forno ou estimar corretamente velocidades de produção e temperaturas de operação; e,
- Analisar o comportamento do fluido que passa pelo interior do forno, pois este é o responsável direto pela retirada do solvente durante o processo de cura do esmalte.

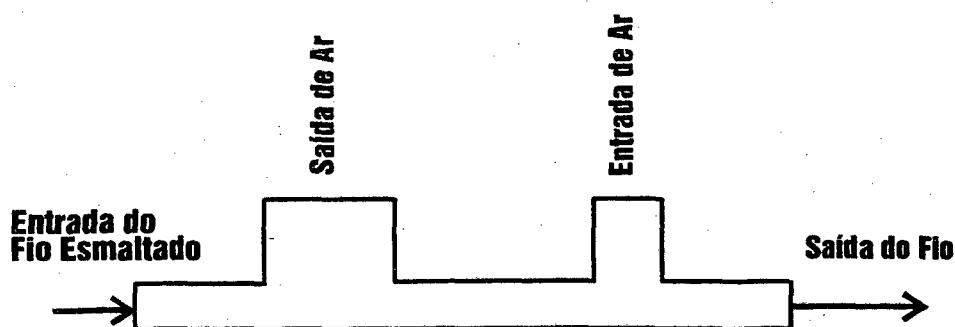


Figura 5.1: Representação esquemática de uma esmaltatriz

Portanto, uma otimização do processo de cura do esmalte passa, obrigatoriamente, pelo conhecimento do movimento do fluido dentro destes fornos. E nos fornos, a região de maior interesse é, sem dúvida alguma, a adjacente à bifurcação situada próximo à entrada do fio. É nesta região que o fluido deixa de escoar paralelamente ao fio e passa a fazê-lo obliquamente, retirando o solvente e promovendo o processo da cura do esmalte. A Fig. 5.1 mostra um desenho esquemático de um forno de esmaltação. A segunda bifurcação, próxima à saída do fio, não carece de um estudo mais aprofundado, visto que, ao passar por esta região, o fio não deverá apresentar traços significativos da presença de solventes no esmalte.

Uma pequena quantidade de ar entra no forno pela mesma entrada por onde entra o fio, lado esquerdo da Fig. 5.1. Este ar entra por que a pressão é menor que a pressão ambiente.

Este trabalho é uma seqüência do trabalho de Peters *et alli* [32] e Peters [34] que estudaram o comportamento laminar no interior do forno de esmaltação. Peters [33] também estudou o problema de transporte de massa no fio, considerando apenas os efeitos difusivos. Concomitantemente ao presente trabalho, Pereira [47], experimentalmente, obteve

uma correlação para o número de Nusselt em fios em movimento. Através desta correlação, um estudo para saber o que ocorre com a temperatura no fio em movimento foi realizado por Furukawa e Colle [11].

Conhecer como o escoamento influi no processo de cura do fio esmaltado é de muito interesse para os que projetam fornos para este fim. Mas para a obtenção desta informação somente com a aplicação um modelo tridimensional para escoamento turbulento. Isto aumentaria consideravelmente o grau de complexidade do problema estudado. Desta forma, em nenhuma das hipóteses simplificativas que caracterizaram o problema estudado, realizadas no segundo capítulo, levou-se em conta a presença de um fio no interior do duto.

Como já comentado, como não há interesse em se conhecer como escoar o ar na região da bifurcação situada à direita na Fig. 5.1, por isto a geometria em estudo é apresentada na Fig. 5.2.

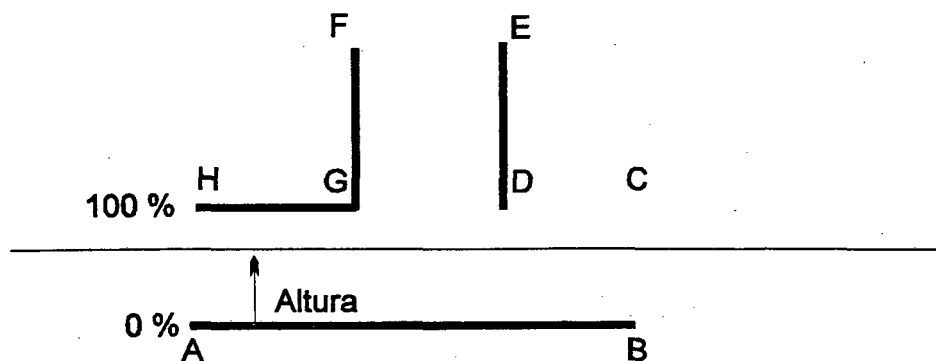


Figura 5.2: Geometria da Bifurcação

Os fatores relevantes de estudo e que este trabalho pretende qualificar são :

1. Influência das vazões;
2. Influência do ângulo de bifurcação;
3. Influência da seção de entrada do duto vertical;
4. Influência das obstruções internas.

Influência das Vazões

No forno de esmaltação o ar entra tanto pelo lado direito do duto horizontal quanto pelo esquerdo. A questão colocada aqui é a seguinte : se aumentarmos a vazão do lado esquerdo, de que forma isto influenciará no escoamento no duto horizontal ?

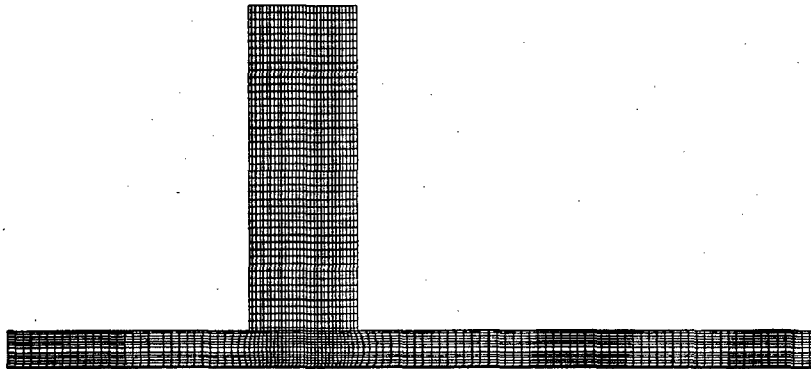


Figura 5.3: Malha 120 x 16 (horizontal) e 32 x 62 (vertical) usada na solução do problema

Para responder a tal pergunta, três situações foram computados :

1. $V_e = 0,95 \left[\frac{m^3}{s} \right] / m$ e $V_w = 0,05 \left[\frac{m^3}{s} \right] / m$
2. $V_e = 0,85 \left[\frac{m^3}{s} \right] / m$ e $V_w = 0,15 \left[\frac{m^3}{s} \right] / m$
3. $V_e = 0,75 \left[\frac{m^3}{s} \right] / m$ e $V_w = 0,25 \left[\frac{m^3}{s} \right] / m$

onde V_e e V_w representam, respectivamente, as vazões no lado direito e esquerdo do duto horizontal.

Todas as três configurações acima foram resolvidas para a seguinte geometria :

- Comprimento $\overline{AH} = 70 \text{ [mm]}$
- Comprimento $\overline{FE} = 200 \text{ [mm]}$
- Comprimento $\overline{AB} = 1500 \text{ [mm]}$
- Comprimento $\overline{HG} = 450 \text{ [mm]}$
- Comprimento $\overline{DE} = 600 \text{ [mm]}$
- Sem obstruções internas
- Malha do Duto Horizontal = 120 x 16 Volumes - Incluindo os fictícios
- Malha do Duto Vertical = 32 x 62 Volumes - Incluindo os fictícios
- O número de Reynolds avaliado em \overline{FE} vale 63.781.
- Ângulo de Bifurcação = 90°

A malha escolhida para este problema, Fig. 5.3, foi testada com outras mais grosseiras e mais refinadas. Esta foi a que apresentou os melhores resultados. Malhas mais refinadas que esta apresentaram um tempo de processamento muito alto e resultados semelhantes aos que serão apresentados.

Para a avaliação do número de Reynolds, o valor da viscosidade absoluta, μ , foi de $1,846 \times 10^{-5} \text{ [kg/ms]}$, enquanto o valor da massa específica, ρ , foi de $1,1774 \text{ [kg/m}^3\text{]}$. Estes dados foram obtidos da tabela de propriedades do ar existente no livro do Holman [16]. A temperatura de referência foi 350 [K] .

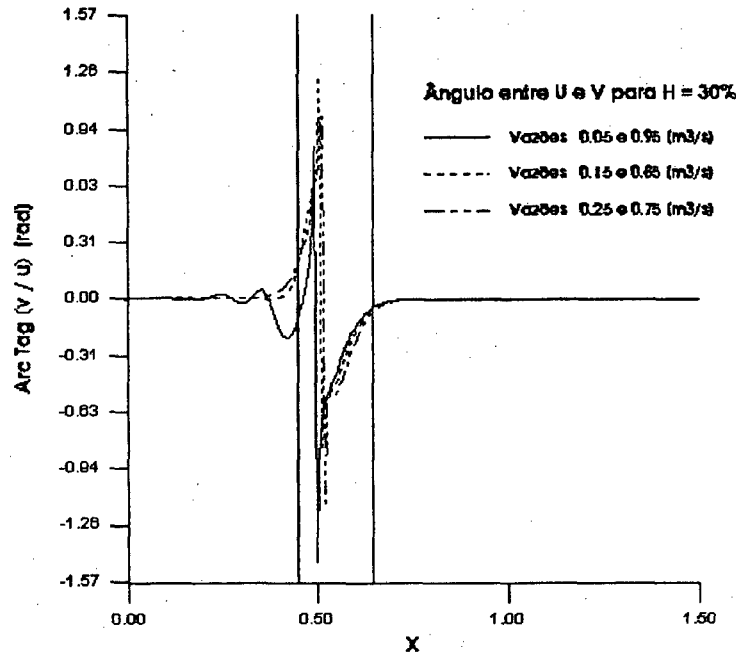


Figura 5.4: Ângulo entre u e v na altura = 30 %

A Fig. 5.4 mostra o ângulo que faz o vetor velocidade na altura de 21 [mm] (30 %), para as três configurações de escoamento citadas anteriormente. As duas linhas verticais que aparecem neste gráfico e nos outros que se seguirão, mostram a posição do duto vertical. Desta forma, pode-se perceber com clareza a influência do duto vertical no escoamento que está ocorrendo no duto horizontal.

Deste resultado percebe-se que a região de influência do duto vertical é muito pequena. De fato este já era um resultado esperado, pois que o efeito de difusão da informação da presença do duto vertical deve ser bem pequena visto que o número de Reynolds é alto.

Nota-se também que do lado esquerdo da bifurcação, a influência do duto vertical é tanto maior quanto menor for a vazão, o que é uma confirmação da consideração feita no parágrafo acima. No trabalho de Peters *et alli* [32], onde, para uma geometria equivalente, escoamento laminar foi estudado, chegou-se a mesma conclusão. Esta análise é confirmada

para as outras duas alturas, 50 %, cujo resultado pode ser visto na Fig. 5.5, e 70%, cujo resultado pode ser visto na Fig. 5.6.

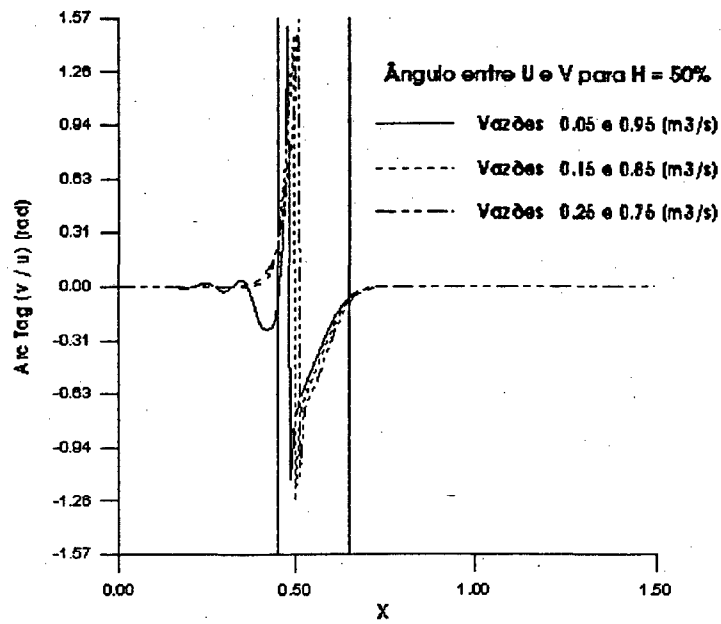


Figura 5.5: Ângulo entre u e v na altura = 50 %

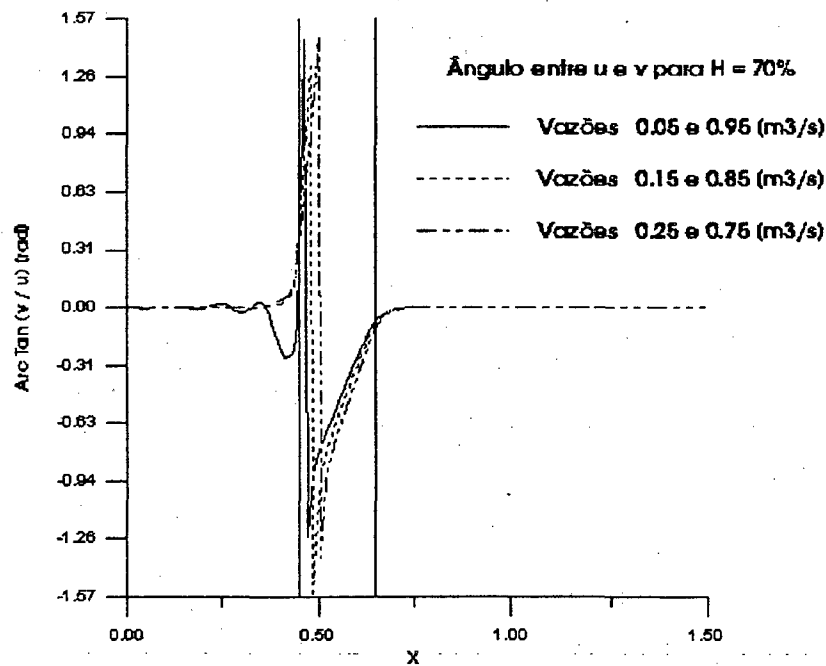


Figura 5.6: Ângulo entre u e v na altura = 70 %

A Fig. 5.7 mostra $\frac{v}{u_{ref}}$, mas desta vez para uma altura fixa, 70 %, mas para relações de vazão variáveis. Para todos os gráficos que serão apresentados, o valor de $u_{ref} = 15,0 [m/s]$. Como pode-se observar, quanto maior a vazão, maior a velocidade v , mas, pelo menos para esta altura, não é grande a diferença de velocidades entre as três configurações.

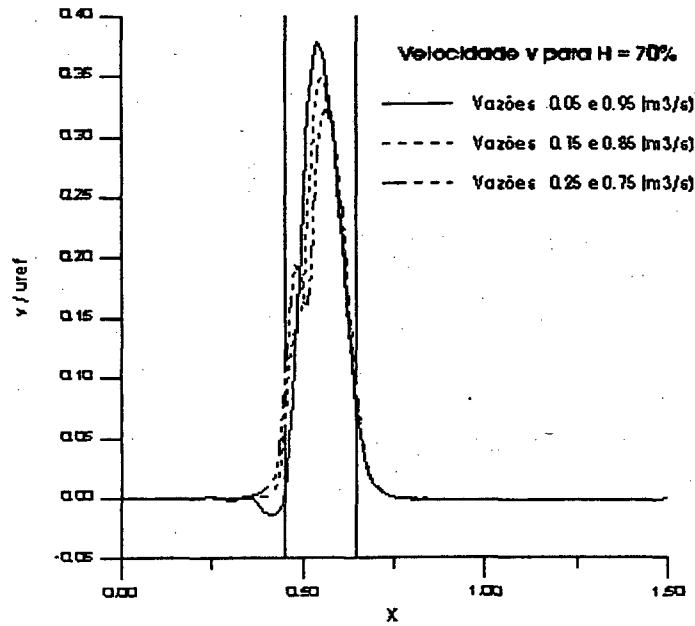


Figura 5.7: Comportamento de $\frac{v}{u_{ref}}$ para as três vazões

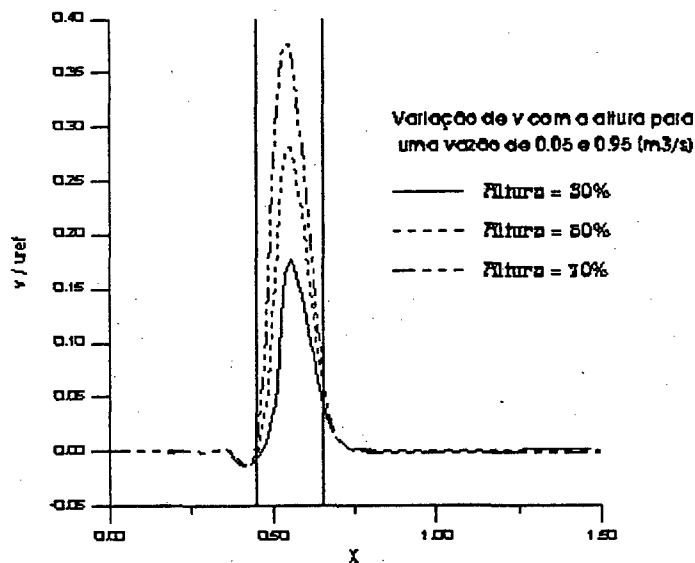


Figura 5.8: Comportamento de $\frac{v}{u_{ref}}$ em diferentes alturas

E por fim, a Fig. 5.8 mostra como se comporta a velocidade v para as três alturas estudadas e para uma entrada de ar de $V_e = 0,95 [\frac{m^3}{s}]/m$ e $V_w = 0,05 [\frac{m^3}{s}]/m$.

Uma consideração importante que se pode obter neste momento é sobre qual altura do duto horizontal deve-se posicionar o fio esmaltado. É claro que a quantidade de solvente retirado do fio tem grande dependência com a velocidade normal ao fio, v . Como se observa na Fig. 5.8, esta velocidade é influenciada, pelo menos na região próxima à birurcação, pela altura. Quanto mais próximo da entrada do duto vertical maior será esta velocidade e menor será quanto mais próxima da base do duto horizontal. Esta é uma informação relevante para que se determine a posição ideal para posicionar a que altura deve o fio esmaltado passar pelo forno.

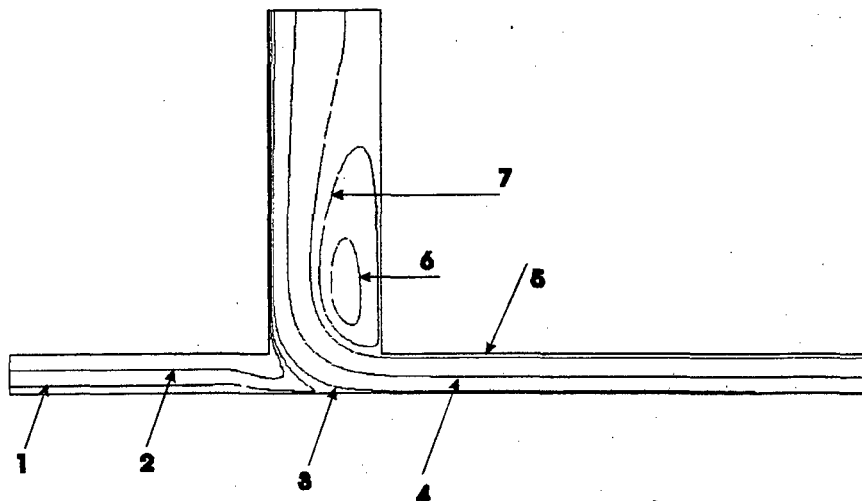


Figura 5.9: Linhas de corrente para $v_w = 0,05 [\frac{m^3}{s}]/m$ e $v_e = 0,95 [\frac{m^3}{s}]/m$

Número	Linha de Corrente
1	0,0106
2	0,0319
3	-0,0422
4	-0,5110
5	-0,9050
6	-1,1140
7	-1,0260

Tabela 5.1: Linhas de Corrente da Fig. 5.9

Para complementar esta parte do trabalho, mostra-se na Fig. 5.9 as linhas de corrente para o problema onde as vazões são : $v_w = 0,05 [\frac{m^3}{s}]/m$ e $v_e = 0,95 [\frac{m^3}{s}]/m$.

A linha \overline{AB} na Fig. 5.2 foi considerada a linha de referência nula para o cálculo das linhas de corrente, para todas as figuras contendo linhas de corrente neste capítulo.

Influência do Ângulo da Bifurcação

Todos os resultados apresentados anteriormente foram obtidos supondo um duto vertical perpendicular ao duto horizontal. Evidentemente, ângulos de bifurcações diferentes causarão recirculações maiores ou menores no duto vertical. Isto já foi visto em situações laminares no capítulo anterior. Não há razão para esperar um comportamento diferente em escoamentos turbulentos.

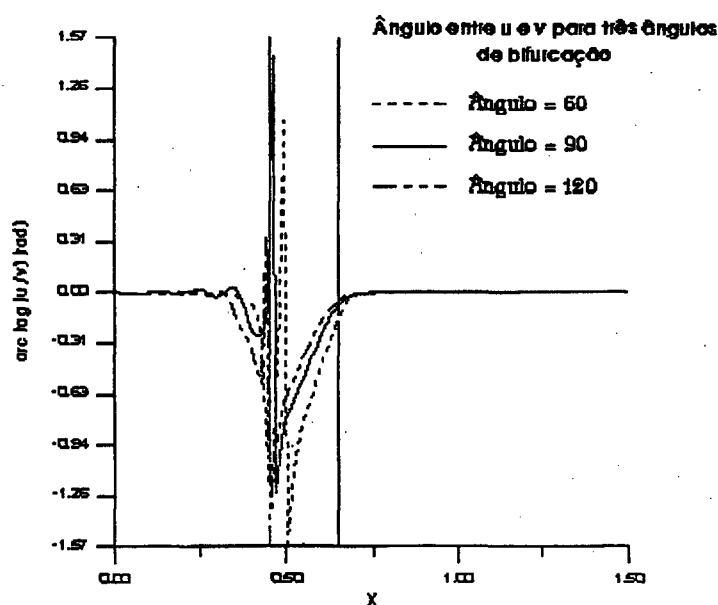


Figura 5.10: Ângulo entre u e v na altura = 70 % para três ângulos de bifurcação

Mas, o que nos interessa é saber se inclinando o duto vertical, o escoamento no duto horizontal sofre significativa alteração. Apesar de demonstrado que a presença da bifurcação pouco altera o escoamento no duto horizontal, fica a dúvida se uma inclinação no duto

vertical causaria algum efeito no comportamento do escoamento do duto horizontal. A expectativa é que nenhuma grande alteração deva ocorrer.

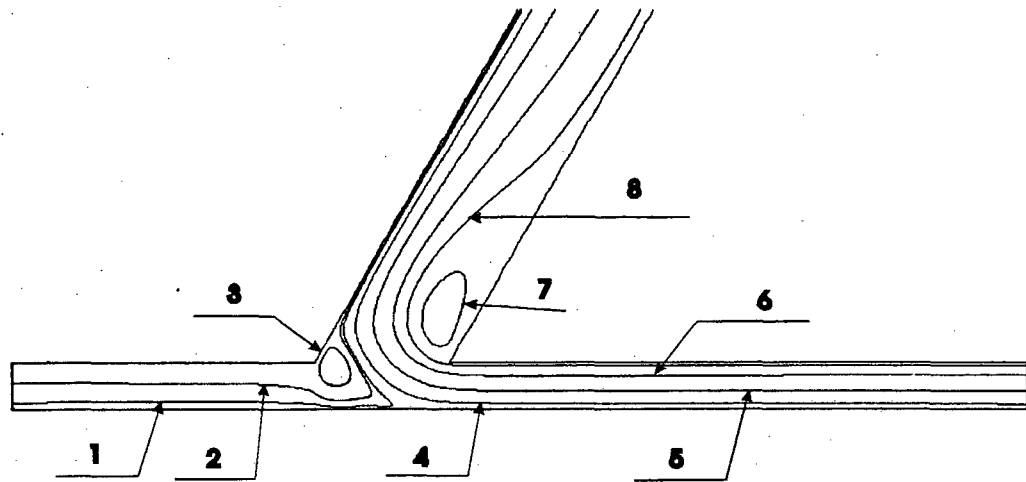


Figura 5.11: Linhas de corrente para $v_w = 0,05 \left[\frac{m^3}{s} \right] / m$ e $v_e = 0,95 \left[\frac{m^3}{s} \right] / m$

Número	Linha de Corrente
1	$7,873 \cdot 10^{-3}$
2	$2,993 \cdot 10^{-2}$
3	$8,632 \cdot 10^{-2}$
4	$-1,064 \cdot 10^{-1}$
5	$-3,787 \cdot 10^{-1}$
6	$-7,248 \cdot 10^{-1}$
7	$-1,094 \cdot 10^0$
8	$-9,371 \cdot 10^{-1}$

Tabela 5.2: Linhas de Corrente da Fig. 5.11

Para ver se o ângulo da bifurcação causa algum efeito na região de interesse, três geometrias foram comparadas para uma única configuração de escoamento.

- Comprimento $\overline{AH} = 70 \text{ [mm]}$
- Comprimento $\overline{FE} = 200 \text{ [mm]}$
- Comprimento $\overline{AB} = 1500 \text{ [mm]}$
- Comprimento $\overline{HG} = 450 \text{ [mm]}$
- Comprimento $\overline{DE} = 600 \text{ [mm]}$
- Sem obstruções internas

- Malha do Duto Horizontal = 120 x 16 Volumes - Incluindo os fictícios
- Malha do Duto Vertical = 32 x 62 Volumes - Incluindo os fictícios
- O número de Reynolds avaliado em \overline{FE} vale 63.781.
- Ângulo de Bifurcação = 60°, 90° e 120°
- Vazões : $v_w = 0,05 [\frac{m^3}{s}]/m$ e $v_e = 0,95 [\frac{m^3}{s}]/m$

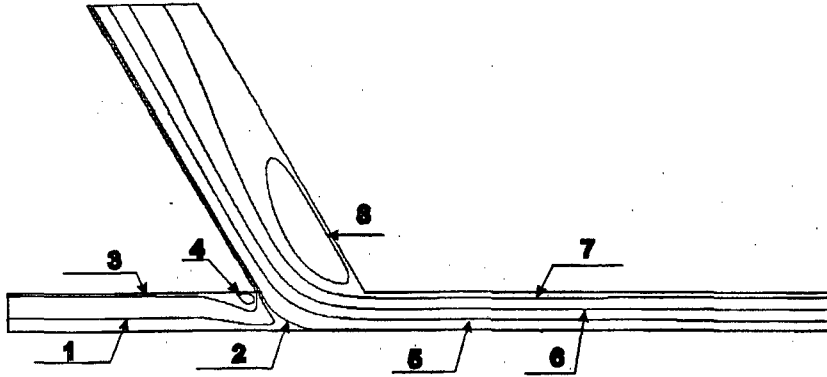


Figura 5.12: Linhas de corrente para $v_w = 0,05 [\frac{m^3}{s}]/m$ e $v_e = 0,95 [\frac{m^3}{s}]/m$

Número	Linha de Corrente
1	$1,743 \cdot 10^{-2}$
2	$-7,276 \cdot 10^{-3}$
4	$4,864 \cdot 10^{-2}$
3	$5,920 \cdot 10^{-2}$
5	$-2,502 \cdot 10^{-1}$
6	$-5,451 \cdot 10^{-1}$
7	$-8,607 \cdot 10^{-1}$
8	$-1,035 \cdot 10^0$

Tabela 5.3: Linhas de Corrente da Fig. 5.12

A conclusão que se obtém observando a Fig. 5.10 é que para estes ângulos de bifurcação não há alteração no campo de velocidades fora das proximidades da bifurcação e, mesmo na região da bifurcação, o campo de velocidade não se altera muito, confirmando, assim, a expectativa inicial.

Percebe-se também que, na bifurcação de 60°, o fluido inicia o seu processo de mudança de direção um pouco mais a direita do que nas outras duas situações apresentadas.

Mas, aparentemente, a diferença é muito pequena para que algum proveito possa se tirar deste fato.

A Fig. 5.11 mostra as linhas de corrente do caso com uma bifurcação de 60° . A tabela 5.2 mostra o valor das linhas de corrente indicados na Fig. 5.11.

A Fig. 5.12 mostra as linhas de corrente do caso com uma bifurcação de 120° . A tabela 5.3 mostra o valor das linhas de corrente indicados na Fig. 5.12.

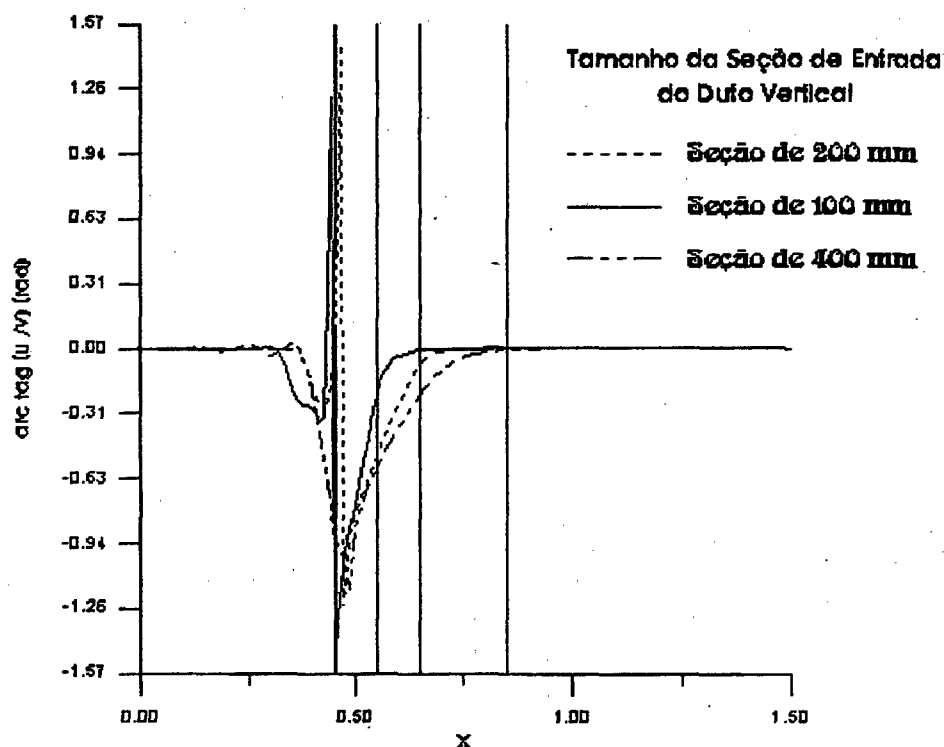


Figura 5.13: Ângulo entre u e v na altura = 70% para três tamanhos da seção de entrada do duto vertical

Influência da Seção de Entrada do Duto Vertical

Como visto, nos exemplos já mostrados, a influência do duto vertical no escoamento no duto horizontal, fica praticamente restrita às proximidades da seção de entrada do duto

vertical. Então porque não aumentar o tamanho da seção de entrada do duto vertical e estender o seu efeito para uma maior região do duto horizontal ? Qual seria, então, o comportamento do fluido para esta nova situação ? Para responder esta pergunta, as seguintes situações foram estudadas :

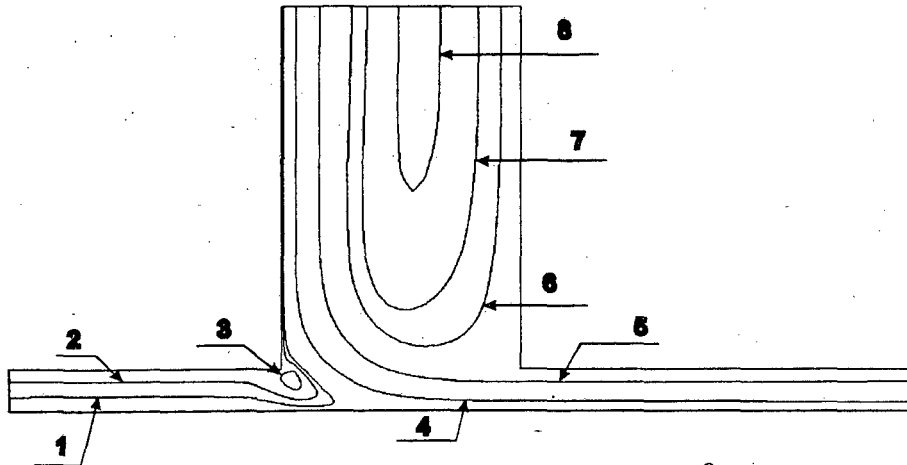


Figura 5.14: Linhas de corrente para $v_w = 0,05 \left[\frac{m^3}{s} \right] / m$ e $v_e = 0,95 \left[\frac{m^3}{s} \right] / m$

Número	Linha de Corrente
1	$1,807 \cdot 10^{-2}$
2	$3,770 \cdot 10^{-2}$
3	$6,089 \cdot 10^{-2}$
4	$-2,128 \cdot 10^{-1}$
5	$-6,981 \cdot 10^{-1}$
6	$-1,130 \cdot 10^0$
7	$-1,262 \cdot 10^0$
8	$-1,416 \cdot 10^0$

Tabela 5.4: Linhas de Corrente da Fig. 5.14

- Comprimento $\overline{AH} = 70 \text{ [mm]}$
- Comprimento $\overline{FE} = 100, 200 \text{ e } 400 \text{ [mm]}$
- Comprimento $\overline{AB} = 1500 \text{ [mm]}$
- Comprimento $\overline{HG} = 450 \text{ [mm]}$
- Comprimento $\overline{DE} = 600 \text{ [mm]}$
- Sem obstruções internas
- Malha do Duto Horizontal = 120 x 16 Volumes - Incluindo os fictícios

- Malha do Duto Vertical = 32 x 62 Volumes - Incluindo os fictícios
- O número de Reynolds avaliado em \overline{FE} vale 63.781.
- Ângulo de Bifurcação = 90°

É de se esperar que um duto vertical com uma seção de entrada maior não tenha um comportamento muito diferenciado do duto já estudado, ou seja, sem muita influência no comportamento do escoamento do duto horizontal além da região da bifurcação.

A conclusão que se obteve com o estudo deste parâmetro é que o aumento demasiado da seção causa um efeito não esperado. O escoamento no duto horizontal comporta-se como se o duto vertical fosse menor do que ele realmente o é. Isto pode ser visto na Fig. 5.14, onde as linhas de corrente para um duto de seção de 400 [mm] são vistos. Percebe-se que a presença da recirculação faz com que o fluido não altere a sua direção, como se a seção do duto vertical fosse bem menor do que ela realmente o é. A tabela 5.4 mostra os valores das linhas de correntes indicadas na Fig. 5.14

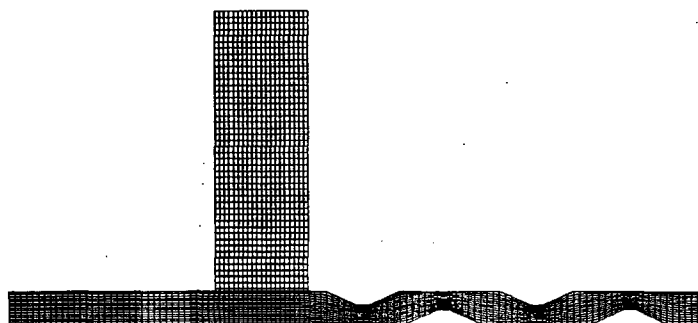


Figura 5.15: Malha da esmaltatriz com quatro obstruções internas

Influência das Obstruções

Como visto, a presença do duto vertical causa um efeito somente na região próxima a bifurcação. Fora desta região o escoamento flui como entre duas placas planas e paralelas. Então, se no interior do forno da esmaltatriz for necessário que se crie uma turbulência no

movimento do ar no duto horizontal, somente com a inclusão de obstruções internas isto será possível.

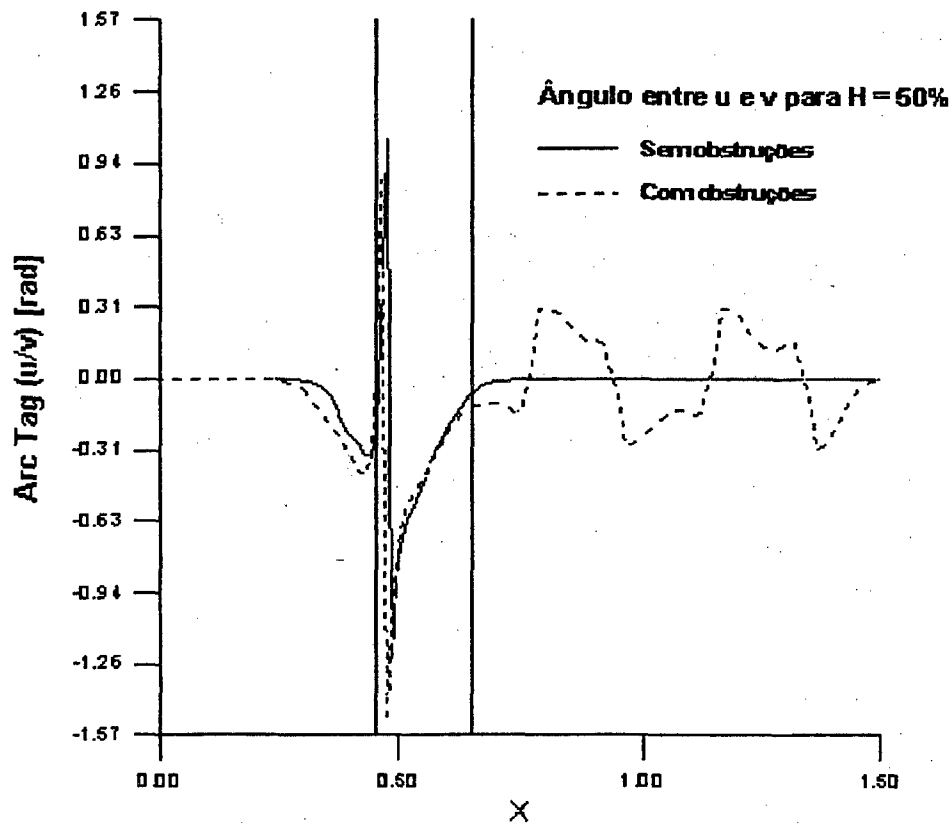


Figura 5.16: Ângulo entre u e v na altura = 50% para duto com e sem obstruções internas

A geometria estudada foi a seguinte :

- Comprimento $\overline{AH} = 70$ [mm]
- Comprimento $\overline{FE} = 200$ [mm]
- Comprimento $\overline{AB} = 1500$ [mm]
- Comprimento $\overline{HG} = 450$ [mm]
- Comprimento $\overline{DE} = 600$ [mm]
- Obstruções internas de 30 [mm]
- Malha do Duto Horizontal = 120 x 16 Volumes - Incluindo os fictícios
- Malha do Duto Vertical = 32 x 62 Volumes - Incluindo os fictícios
- O número de Reynolds avaliado em \overline{FE} vale 63.781.

- Ângulo de Bifurcação = 90°

Uma das maneiras possíveis de se introduzir as obstruções é apresentada na Fig. 5.15, onde pode ser visto a malha do problema estudado com quatro obstruções.

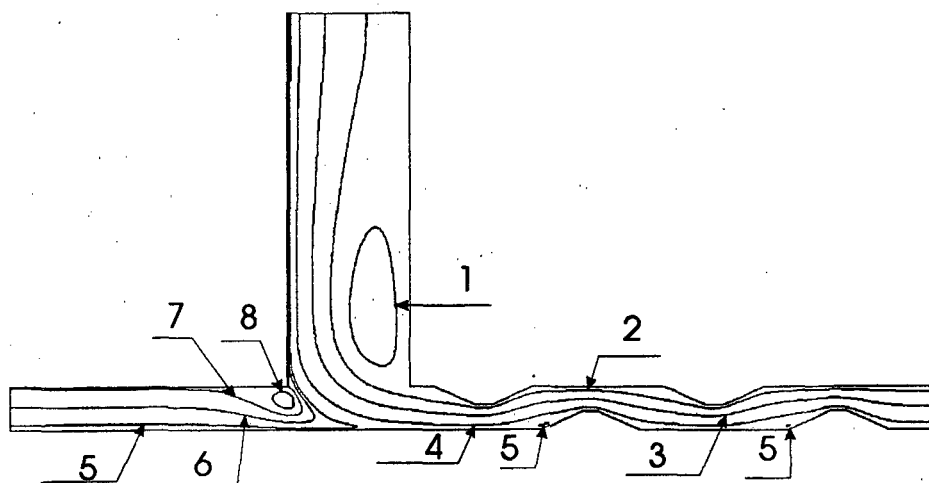


Figura 5.17: Linha de corrente para a esmaltatriz com quatro obstruções internas

Número	Linha de Corrente
1	$-1,079 \cdot 10^0$
2	$-8,797 \cdot 10^{-1}$
3	$-5,310 \cdot 10^{-1}$
4	$-1,487 \cdot 10^{-1}$
5	$6,527 \cdot 10^{-3}$
6	$2,814 \cdot 10^{-2}$
7	$5,092 \cdot 10^{-2}$
8	$6,675 \cdot 10^{-2}$

Tabela 5.5: Linhas de Corrente da Fig. 5.17

Na Fig. 5.16, onde o ângulo entre u e v para a altura de 50% é mostrado, percebe-se que, como era de se esperar, que o fluido acompanhará nova geometria. As linhas de corrente deste caso são apresentadas na Fig. 5.17.

Muito provavelmente, a posição e a forma das obstruções apresentadas não são as ideais para a aplicação em um forno de esmaltatriz. Para a determinação desta geometria ótima,

o problema térmico, bem como o problema da transferência de massa no fio esmaltado devem ser resolvidos conjuntamente.

Sugestões para Próximos Trabalhos

Para encerrar este trabalho gostaríamos de enfatizar algumas das contribuições deste trabalho :

- Pela primeira vez, um trabalho desenvolvido no âmbito do SINMEC fez uso de coordenadas generalizadas conjuntamente com o modelo $k-\epsilon$ de turbulência. As equações da turbulência escritas na forma com que foram apresentadas neste trabalho não foram encontradas em nenhuma das referências estudadas.
- A partir deste trabalho, com a aplicação da metodologia de multidomínios, pode-se estudar geometrias que até então não eram possíveis, mesmo usando coordenadas generalizadas na tentativa do mapeamento do domínio.
- E por fim, um programa para o estudo do escoamento em dutos com bifurcação, usando um modelo de turbulência está pronto para ser usado em novas possibilidades de geometrias.

Como sugestão para futuros trabalhos pode-se indicar os seguintes temas :

- Verificação experimental do campo de velocidades na bifurcação estudada, para a verificação da qualidade da solução numérica.
- Aplicação de outras funções de parede e a comparação dos resultados.
- Um estudo sobre o método de multidomínios, procurando obter a maneira mais eficiente para obter a solução.
- Comparação deste método de multidomínios com um outro método que use malha não-estruturada, como elementos finitos ou elementos finitos baseado em volume de controle *control volume finite element method*.

Referências Bibliográficas

1. Blowers, R. M., "The Computation of Two-Dimensional Viscous Flow Throug a T-Junction", **Computer Physics Communications**, Vol. 4, 64-72 (1972).
2. Bramley, J. S. e Dennis, S. C. R., "The Numerical Solution of Two-Dimensional Flow in a Branching Channel", **Computers & Fluids**, Vol. 12, 339-355 (1984).
3. Bramley, J. S. e Sloan, D. M., "Numerical Solution for Two-Dimensional Flow in a Branching Channel Using Boundary-Fitted Coordinates", **Computers & Fluids**, Vol. 15, 297-311 (1987).
4. Byrne, A., Hatton, P. e Marriott, P., "Turbulent Flow in the Entrance Region of a Parallel Wall Passage", **Proc. Instn. Mech. Engng.**, Vol. 184, 697 (1970).
5. Cebecci, T. e Smith, A. O., "Analysis of Turbulent Boundary Layers", **Academic Press**, Nova Iorque, (1974).
6. Dimitriadis, K. P., "Computation of Three-Dimensional Turbulent Flow in Non-Orthogonal Junctions", **Ph.D. Thesis**, Universidade de Manchester, Manchester, Inglaterra, (1986).
7. Ehrlich, L. W. e Friedman, M. H., "Computational Aspects of Aortic Bifurcation Flows", **Computers & Fluids**, Vol. 13, 177-183 (1985).
8. Ferreira, A. B. H., "Novo Dicionário da Língua Portuguesa, Editora Nova Fronteira, 2ª ed, (1986).
9. Ferziger, J. H., "Simulation of Incompressible Turbulent Flows - Review, **Journal of Computational Physics**, Vol. 69, 1-48 (1987).
10. França Fº, M. F. "Estudo Comparativo de Métodos para Tratamento do Acoplamento Pressão-Velocidade", **Dissertação de Mestrado**, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, (1991).
11. Furukawa, E. e Colle, S., "Distribuição do Número de Nusselt do Fio em Movimento em Confluência de Forno de Esmaltatriz", **Relatório Pirelli**, (1993).
12. Hackman, L. P., "Numerical Study of the Turbulent Recirculating Flow over a Backward-Facing Step Using a Two Equation Turbulence Model", **Ph.D. Thesis**, Universidade de Waterloo, Waterloo, Canadá, (1982).

13. Harlow, F. H. e Welch, J. E., "Numerical Calculation of Time Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface", **Physics of Fluids**, Vol. 8, 2182–2189 (1965).
14. Harlow, F. H. e Nakayama, P. I., "Transport of Turbulence Energy Decay Rate", **Los Alamos Scientific Laboratory**, Report LA-3854, Universidade da Califórnia - Los Alamos, (1968).
15. Hayes, R. E., Nandakumar, K. e Nasr-El-Din, H., "Steady Laminar Flow in a 90 Degree Planar Branch", **Computers & Fluids**, Vol. 17, 537–553 (1989).
16. Holman, J. P., "Transferência de Calor", **McGraw-Hill**, (1983).
17. Karino, T., Motomiya, M. e Goldsmith, H. L., "Patterns at the Major T-Junctions of the Dog Descending Aorta", **Journal of Biomechanics**, Vol. 23, 537–548 (1990).
18. Kawaguti, M. e Hamano, A., "Numerical Study on Bifurcating Flow of a Viscous Fluid", **Journal of the Physical Society of Japan**, Vol. 46, 1360–1365 (1979).
19. Launder, B. E., "Numerical Computation of Convective Heat Transfer in Complex Turbulent Flows : Time to Abandon Wall Function ?", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Vol. 27, 1485–1491 (1984).
20. Launder, B. E. e Spalding, D. B., "The Numerical Computation of Turbulent Flows", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 3, 269–289 (1974).
21. Leschziner, M. A. e Dimitriadis, K. P., "Computation of Three-Dimensional Turbulent Flow in Non-Orthogonal Junctions by a Branch-Coupling Method", **Computer & Fluids**, Vol. 17, 371–396 (1989).
22. Liepsch, D., "Measurement and Calculations of Laminar Flow in a Ninety Degree Bifurcation", **Journal of Biomechanics**, Vol. 15, 473–485 (1982).
23. Maliska, C. R., "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional – Coordenadas Generalizadas", **Monografia para o Concurso de Professor Titular na Área de Ciências Térmicas**, EMC-UFSC, Florianópolis, (1992).
24. Maliska Jr., C. R. e Dihlmann, A., " Visualizador Tridimensional para Campos Escalares", **Anais do XIII Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para a Engenharia**, Porto Alegre , (1992).
25. Marchi, C. H., Maliska, C. R. e Silva, A. F. C., "Solução Numérica de Escoamentos em Geometrias Complexas Utilizando a Técnica de Multiblocos", **IV Encontro Nacional de Ciências Térmicas**, p ag. 353–356, Rio de Janeiro, (1992).

26. Martinuzzi, R. e Pollard, A., "Comparative Study of Turbulence Models in Predicting Turbulent Pipe Flow - Part I : Algebraic Stress and k - ϵ Models", *AIAA Journal*, Vol. 25, 29-36 (1989).
27. Nallasamy, M., "Turbulence Models and Their Applications to the Prediction of Internal Flows : A Review", *Computers & Fluids*, Vol. 15, 151-194 (1987).
28. Obi, S., Peric, M. e Scheuerer, G., "Second-Moment Calculation Procedure for Turbulent Flows with Collocated Variable Arrangement", *AIAA Journal*, Vol. 19, 585-590 (1991).
29. Patankar, S. V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing, (1980).
30. Peaceman, D. W., and Rachford, H. H. Jr., "The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations", *Journal Soc. Indust. Applied Mathematics*, Vol. 3, N° 11, pag. 28-41, (1955).
31. Peric, M., Kessler, R. e Scheuerer, G., "Comparison of Finite Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids", *Computers & Fluids*, Vol. 16, 389-403 (1988).
32. Peters, S., Silva, A. F. C, Maliska, C. R. e Colle, S., "Modelação Numérica do Escoamento Laminar de Ar no Interior do Forno de Esmaltagem", *Relatório Pirelli*, (1988).
33. Peters, S., "Estudo Paramétrico do Problema de Transferência de Calor e Massa em Fios em Movimento Contínuo", *Dissertação de Mestrado*, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, (1990).
34. Peters, S., "Otimização do Processo de Esmaltagem Sujeito à Escoamento com Resaltos no Forno", *Relatório Pirelli*, (1990).
35. Pletcher, R. H., "Progress in Turbulent Forced Convection", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 110, 1129-1144 (1988).
36. Pollard, A., "Computer Modelling of Flow in Tee-Junctions", *Physic Chemical Hydrodynamics*, Vol. 2, 203-227 (1981).
37. Pollard, A. e Spalding, D. B., "The Prediction of the Three-Dimensional Turbulent Flow Field in a Flow-Splitting Tee-Junction", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 13, 293-306 (1978).
38. Prata, A. T. e Sparrow, E. M., "Forced Convection Evaporation from Cavity Containing a Liquid Whose Surface is Curved by Capillarity. Computations in Interlocking Rectangular and Cylindrical Domain", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 8, 667-688 (1985).

39. Raithby, G. D. e Schneider, G. E., "Elliptic Systems : Finite-Difference Method II", **Handbook of Numerical Heat Transfer**; ed. Minkowycz, W. J. et al., Wiley Interscience, pag. 241–291, (1988).
40. Raithby, G. D. e Torrance, K. E., "Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow", **Computers & Fluids**, Vol. 2, 191–296 (1974).
41. Roache, P. J. "Computacional Fluid Dynamics", Albuquerque, New Mexico, Hermosa,(1976).
42. Rodi, W., "Turbulence Models and Their Application in Hydraulics - A State of the Art Review".
43. Rindt, C. C. M., Van Steenhoven, A. A., Janssen, J. D., Reneman, R. S. e Segal, A., "A Numerical Analysis of Steady Flow in a Three-Dimensional Model of the Carotid Artery Bifurcation", **Journal of Biomechanics**, Vol. 23, 461–473 (1990).
44. Samagaio, A. e Vlachos, N. S., "Calculation of Three-Dimensional Laminar Flows in T-Shaped Junctions", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 75, 393–407 (1989).
45. SINMEC, "Código Computacional do MACH2D", SINMEC–EMC–UFSC, Florianópolis, (1990).
46. Sondak, D. L e Pletcher, R. H., "Application of Wall Functions to Generalized Nonorthogonal Curvilinear Coordinate Systems, **Proceedings of AIAA 24th Fluid Dynamics Conference**, paper 93-3107, Orlando, (1993).
47. Souza, J. P., "Determinação Experimental do Número de Nusselt em Fios em Movimento com Escoamento Oblíquo de Ar", **Dissertação de Mestrado em Andamento**, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.
48. Stephenson, P. L., "A Theoretical Study of Heat Transfer in Two-Dimensional Turbulent Flow in a Circular Pipe and Between Parallel and Diverging Plates", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Vol. 19, 413–423 (1976).
49. Thompson, J. F., Thames, F. C. e Mastin, C. W., "Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies", **Journal of Computational Physics**, Vol. 15, 299–319 (1974).
50. Schneider, G. E. e Zedam, M., "A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems", **Numerical Heat Transfer**, Vol. 4, 1–19, (1981).

51. Van Doormaal, J. P. e Raithby, G. D., "*Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flow*", **Numerical Heat Transfer**, Vol. 7, 147-163 (1984).

Equação de k

Para se obter as equações da conservação da energia cinética turbulenta, k , e da dissipação da energia cinética turbulenta, ϵ , é importante que as seguintes propriedades sejam conhecidas :

Sejam duas quantidades turbulentas quaisquer f e g tais que $f = \bar{f} + f'$ e $g = \bar{g} + g'$ então :

$$\overline{f'} = 0 \quad (A.1a)$$

$$\overline{\bar{f}} = \bar{f} \quad (A.1b)$$

$$\overline{f\bar{g}} = \bar{f}\bar{g} \quad (A.1c)$$

$$\overline{f'g} = 0 \quad (A.1d)$$

$$\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g} \quad (A.1e)$$

$$\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'} \quad (A.1f)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} \quad (A.1g)$$

Partindo-se da equação de Navier-Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_L \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (A.2)$$

Fazendo uma média da Eq. (A.2) e usando as propriedades anteriormente citadas, chega-se a :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_L \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{U'_i U'_j} \right] \quad (A.3)$$

Subtraindo da Eq. (A.2) a Eq. (A.3) :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial U'_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial U'_i}{\partial x_j} \right) = & -\frac{\partial P'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_L \left(\frac{\partial U'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U'_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ & - \rho U'_j \frac{\partial U'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \overline{U'_i U'_j} \right) \end{aligned} \quad (A.4)$$

Substituindo os índices “j” por “k” e multiplicando a Eq. (A.4) por U'_j teremos que :

$$\begin{aligned} \rho U'_j \left(\frac{\partial U'_i}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \right) = & -U'_j \frac{\partial P'}{\partial x_i} + U'_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu_L \left(\frac{\partial U'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U'_k}{\partial x_i} \right) \right] \\ & - \rho U'_j U'_k \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} + U'_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \overline{U'_i U'_k} \right) \end{aligned} \quad (A.5)$$

Substituindo os índices “j” por “k” e os índices “i” por “j” e multiplicando a Eq. (A.4) por U'_i teremos que :

$$\begin{aligned} \rho U'_i \left(\frac{\partial U'_j}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\partial U'_j}{\partial x_k} \right) = & -U'_i \frac{\partial P'}{\partial x_j} + U'_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu_L \left(\frac{\partial U'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial U'_k}{\partial x_j} \right) \right] \\ & - \rho U'_i U'_k \frac{\partial U'_j}{\partial x_k} + U'_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \overline{U'_j U'_k} \right) \end{aligned} \quad (A.6)$$

Somando a Eq. (A.5) com a Eq. (A.6) teremos :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} (U'_i U'_j) + \rho \overline{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k} (U'_i U'_j) = & - \left(U'_i \frac{\partial P'}{\partial x_j} + U'_j \frac{\partial P'}{\partial x_i} \right) \\ & + U'_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu_L \left(\frac{\partial U'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial U'_k}{\partial x_j} \right) \right] + U'_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu_L \left(\frac{\partial U'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U'_k}{\partial x_i} \right) \right] \\ & + U'_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \overline{U'_j U'_k} \right) + U'_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \overline{U'_i U'_k} \right) - \rho U'_i U'_k \frac{\partial U'_j}{\partial x_k} - \rho U'_j U'_k \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (A.7)$$

Tirando a média da Eq. (A.7) :

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial}{\partial t} (\overline{U'_i U'_j}) + \rho \overline{U_k} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U'_i U'_j}) = - \left(\overline{U'_i \frac{\partial P'}{\partial x_j}} + \overline{U'_j \frac{\partial P'}{\partial x_i}} \right) \\
+ \overline{U'_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu_L \left(\frac{\partial U'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial U'_k}{\partial x_j} \right) \right]} + \overline{U'_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu_L \left(\frac{\partial U'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U'_k}{\partial x_i} \right) \right]} + \overline{U'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \overline{U'_j U'_k})} \\
+ \overline{U'_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \overline{U'_i U'_k})} - \rho \overline{U'_i U'_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} - \rho \overline{U'_j U'_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k}
\end{aligned} \quad (A.8)$$

mas

$$\overline{U'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \overline{U'_j U'_k})} = \overline{U'_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \overline{U'_i U'_k})} = 0 \quad (A.9)$$

$$- \left[\overline{\rho U'_i U'_k \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k}} + \overline{\rho U'_j U'_k \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k}} \right] = - \rho \overline{U'_i U'_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} - \rho \overline{U'_j U'_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U'_i U'_j U'_k}) \quad (A.10)$$

Substituindo as relações (A.9) e (A.10) na Eq. (A.8) e multiplicando-a por δ_{ij} chegaremos a :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\overline{U_i'^2}) + \rho \overline{U_k} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U_i'^2}) = -2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{U'_i P'}) - 2 \rho \overline{U'_i U'_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} - \quad (A.11)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U_i'^2 U'_k}) + 2 \overline{U'_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu_L \left(\frac{\partial U'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U'_k}{\partial x_i} \right) \right]}$$

Mas, sabendo que $k = \frac{\overline{U_i'^2}}{2}$ então :

$$\overline{U'_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu_L \left(\frac{\partial U'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U'_k}{\partial x_i} \right) \right]} = \mu_L \frac{\partial^2 k}{\partial x_k^2} - \mu_L \left(\frac{\partial \overline{U'_i}}{\partial x_k} \right)^2 \quad (A.12)$$

Substituindo a Eq. (A.12) na Eq. (A.11) teremos então :

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \overline{U_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{U'_i P'}) - \rho \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{k U'_k}) + \mu_L \frac{\partial^2 k}{\partial x_k^2} - \quad (A.13)$$

$$\mu_L \left(\frac{\partial \overline{U'_i}}{\partial x_k} \right)^2 - \rho \overline{U'_i U'_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k}$$

Os termos da Eq. (A.13) que não foram ainda definidos foram modelados da seguinte forma :

$$-\rho \overline{U'_i U'_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} = \mu_T \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.14})$$

$$\mu_L \left(\frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \right)^2 = \rho \epsilon \quad (\text{A.15})$$

Como $\frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{U'_i P'}) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U'_k P'})$ então o último termo que continha alguma incógnita foi modelado da seguinte forma

$$-\overline{U'_k P'} - \rho \overline{k U'_k} = \frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \quad (\text{A.16})$$

Desta forma a equação da energia cinética turbulenta pode ser reescrita da seguinte maneira :

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \overline{U_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + P_k - \rho \epsilon \quad (\text{A.16})$$

Onde

$$P_k = \mu_T \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.17})$$

Equação de ϵ

Diferenciando a Eq. (A.4) em relação a x_k teremos :

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} (U'_i \overline{U_j} + \overline{U_i} U'_j + U'_i U'_j) \right] = -\frac{\partial^2 P'}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left[\mu_L \left(\frac{\partial U'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U'_j}{\partial x_i} \right) + \rho \overline{U'_i U'_j} \right] \quad (\text{A.18})$$

Multiplicando a Eq. (A.18) por $\frac{\partial U'_i}{\partial x_k}$ e tirando a média chegaremos em :

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left(U'_i \bar{U}_j + \bar{U}_i U'_j + U'_i U'_j \right) \right] =$$

$$-\frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 P'}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left[\mu_L \left(\frac{\partial U'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U'_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (\text{A.19})$$

Pois

$$\frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left(\rho \bar{U}'_i U'_j \right) = 0 \quad (\text{A.20})$$

Reordenando os termos teremos que :

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \bar{U}_j \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \right) \right] = -\rho \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} \left(\frac{\partial U'_i}{\partial x_j} \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \right) -$$

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{\partial U'_i}{\partial x_k} U'_j \right) - \rho \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U'_j}{\partial x_k} \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \right) - \bar{U}'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \right) -$$

$$\rho \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \frac{\partial U'_i}{\partial x_j} \frac{\partial U'_j}{\partial x_k} - \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 P'}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left[\mu_L \left(\frac{\partial U'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U'_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (\text{A.21})$$

Multiplicando a equação anterior por $2 \frac{\mu_L}{\rho}$ e substituindo $\frac{\mu_L}{\rho} \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \frac{\partial U'_i}{\partial x_k}$ por ϵ então teremos :

$$\rho \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{U}_j \epsilon) \right] = -2 \frac{\mu_L}{\rho} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \left(\rho \frac{\partial U'_k}{\partial x_i} \frac{\partial U'_k}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial U'_j}{\partial x_k} \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \right) -$$

$$2 \mu_L \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{\partial U'_i}{\partial x_k} U'_j \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{U}'_j \epsilon) - 2 \mu_L \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \frac{\partial U'_i}{\partial x_j} \frac{\partial U'_j}{\partial x_k} -$$

$$2 \frac{\mu_L}{\rho} \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 P'}{\partial x_i \partial x_k} + 2 \frac{\mu_L}{\rho} \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left[\mu_L \left(\frac{\partial U'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U'_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (\text{A.22})$$

pois

$$\rho \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} \left(\overline{\frac{\partial U'_i}{\partial x_j} \frac{\partial U'_i}{\partial x_k}} \right) = \rho \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial U'_k}{\partial x_i} \frac{\partial U'_k}{\partial x_j}} \right) \quad (\text{A.23})$$

e sabendo que

$$2 \frac{\mu_L}{\rho} \frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left[\mu_L \left(\frac{\partial U'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U'_j}{\partial x_i} \right) \right] = \mu_L \rho \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_i^2} - 2 \left(\mu_L \frac{\partial^2 U'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 \quad (\text{A.24})$$

E da seguinte igualdade demonstrada por Harlow e Nakayama [14] :

$$2 \mu_L \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_k} \left(\overline{\frac{\partial U'_i}{\partial x_k} U'_j} \right) = 0 \quad (\text{A.25})$$

Desta forma a Eq. (A.22) pode ser reescrita da seguinte maneira :

$$\rho \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{U_j \epsilon}) \right] = -2 \frac{\mu_L}{\rho} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \left(\overline{\rho \frac{\partial U'_k}{\partial x_i} \frac{\partial U'_k}{\partial x_j}} + \overline{\rho \frac{\partial U'_j}{\partial x_k} \frac{\partial U'_i}{\partial x_k}} \right) + \mu_L \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_i^2} - \quad (\text{A.26})$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{U'_k \epsilon} + 2 \frac{\mu_L}{\rho} \frac{\partial^2 \overline{U'_i P'_i}}{\partial x_i \partial x_k} \right] - 2 \mu_L \frac{\partial \overline{U'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{U'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U'_j}}{\partial x_k} - 2 \rho \left(\frac{\mu_L}{\rho} \frac{\partial^2 \overline{U'_i}}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2$$

Os termos indefinidos foram modelados da seguinte forma :

$$-\rho \left[\overline{U'_k \epsilon} + 2 \frac{\mu_L}{\rho} \frac{\partial^2 \overline{U'_i P'_i}}{\partial x_i \partial x_k} \right] = \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \quad (\text{A.27})$$

$$-2 \frac{\mu_L}{\rho} \left(\overline{\frac{\partial U'_k}{\partial x_i} \frac{\partial U'_k}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial U'_j}{\partial x_k} \frac{\partial U'_i}{\partial x_k}} \right) = \frac{\epsilon}{k} C_1 \overline{U'_i U'_j} \quad (\text{A.28})$$

$$2 \left[\frac{\mu_L}{\rho} \overline{\frac{\partial U'_i}{\partial x_k} \frac{\partial U'_i}{\partial x_j} \frac{\partial U'_j}{\partial x_k}} + \left(\frac{\mu_L}{\rho} \frac{\partial^2 \overline{U'_i}}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 \right] = C_2 \frac{\epsilon^2}{k} \quad (\text{A.29})$$

Substituindo na Eq. (A.26) as Eqs. (A.27), (A.28) e (A.29), bem como usando as relações (A.14) e (A.17) chega-se na forma final da equação da dissipação da energia cinética turbulenta :

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho \overline{U_k} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \right] + \frac{\epsilon}{k} (C_1 P_k - C_2 \rho \epsilon) \quad (\text{A.30})$$

APÊNDICE B

Este apêndice foi reservado para um detalhamento de um dos procedimentos numéricos feito neste trabalho.

As equações apresentadas no segundo e terceiro capítulo referentes às condições de contorno nas paredes, Eqs. (2.20), (2.22), (3.7), (3.8), (3.9) e (3.11), foram escritas supondo que o sistema de coordenadas do plano físico esteja alinhado com o sistema de coordenadas curvilíneas. Isto é verdade para somente alguns dos casos estudados. Quando se coloca as obstruções no duto horizontal, ou quando o duto vertical é posicionado de forma inclinada, este alinhamento entre os sistemas de coordenadas deixa de existir e as equações acima citadas não mais representam o fenômeno estudado.

A Fig. B.1 mostra uma situação onde os sistemas de coordenadas estão desalinhados. Trata-se de uma parede na face sul do domínio. As velocidades \hat{u} e \hat{v} representam as componentes do vetor velocidade nas direções ξ e η respectivamente.

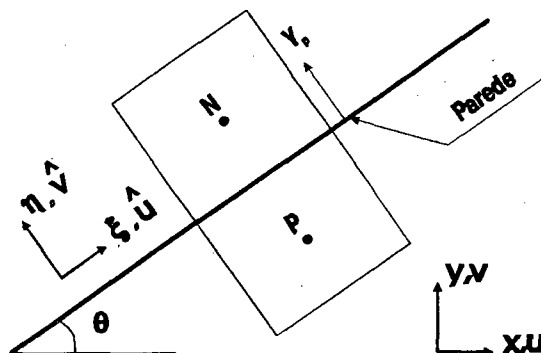


Figura B.1: Fronteira com sistemas de coordenadas desalinhados

Logo :

$$\hat{u} = u \cos\theta + v \sin\theta \quad (B.1)$$

$$\hat{v} = v \cos\theta - u \sin\theta \quad (B.2)$$

Para a face sul mostrada na Fig. B.1 podemos escrever as equações Eq. (3.8) e (3.11) da seguinte maneira :

$$\hat{v}_P = -\hat{v}_N \quad (B.3)$$

$$\hat{u}_P = \hat{u}_N + S_P \quad (B.4)$$

onde

$$S_P = -2 \frac{\tau_w y_P}{\mu + \mu_T} \quad (B.5)$$

Substituindo as Eqs. (B.1) e (B.2) nas Eqs. (B.3) e (B.4) teremos então :

$$u_P = u_N \cos 2\theta + v_N \sin 2\theta + S_P \cos \theta \quad (B.6)$$

$$v_P = u_N \sin 2\theta - v_N \cos 2\theta + S_P \sin \theta \quad (B.7)$$

O valor de θ para cada um dos volumes finitos pode ser facilmente obtido através da seguinte relação :

$$\tan \theta = \frac{y_\xi}{x_\xi} \quad (B.8)$$

Assim, quando houver o desalinhamento entre os sistemas de coordenadas, deve-se usar as Eq. (B.6) e (B.7) para descrever as condições de contorno nas paredes e a velocidade \hat{u}_N , definida pela Eq. (B.1), no lugar de u_N na Eq. (3.9).

Após os desenvolvimentos realizados neste trabalho, tomou-se conhecimento que Sondak e Pletcher [46] propuseram, recentemente, um procedimento semelhante.